Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. G. Herzog
Dr. M. Radosz

WS 2012/13

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

15. Übungsblatt

Ferienübungsblatt, keine Abgabe

Anmeldung für den Übungsschein
Absolut notwendig für den Erhalt des Übungsscheins ist eine Anmeldung im QISPOS-System (Selbstbedienungsfunktionen für Studierende). Die Prüfungsnummer des Scheins lautet 261. Ohne eine rechtzeitige Anmeldung werden Sie den Schein nicht bekommen, selbst wenn Sie genügend Punkte haben. Melden Sie sich so schnell wie möglich an!

Aufgabe 57.

(a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil, Betrag und Argument von

$$z_1 = (1 - i\sqrt{3})^{42}, \qquad z_2 = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}\right)^{201}.$$

(b) Es sei $t \in (0, 2\pi)$. Ermitteln Sie die Polarkoordinaten von $z(t) := 1 - e^{it}$.

(c) Gegeben sei die komplexe Zahl $z = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$. Stellen Sie z^3 und z^{150} in der Form $r(\cos\alpha + i\sin\beta)$ mit $r, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dar.

Aufgabe 58.

(a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil aller 8-ten Einheitswurzeln.

(b) Geben Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^2 - 2z + 3 = 0$ an.

(c) Zeigen Sie: Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{\, 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \,\}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ besteht die Identität

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kz) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})z)}{2\sin(\frac{1}{2}z)}.$$

Hinweise: Verwenden Sie die Formel $\cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$ und die geometrische Summenformel.

Aufgabe 59. Beweisen Sie die Darstellung

$$s_n(f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin((n + \frac{1}{2})(t - x))}{2\sin(\frac{1}{2}(t - x))}\, dt$$

für die n-te Partialsumme

$$s_n(f)(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))$$

der Fourierreihe von f her. Dabei genüge f der Voraussetzung (V) aus der Vorlesung.

Hinweise: Aufgabe 58 c) und Additionstheoreme für $\sin, \cos$.

Aufgabe 60. Bestimmen Sie die komplexe Linearfaktorzerlegung der folgenden Polynome.

(a)	$p_1(z) = z^4 - z^3 + z^2 - z$	(b)	$p_2(z) = z^3 - 2z^2 + z$
(c)	$p_3(z) = z^8 - 1$	(d)	$p_4(z) = z^3 + 1$

Aufgabe 61.

(a) Berechnen Sie die reellen Fourierkoeffizienten der folgenden 2π-periodischen Funktionen, welche auf $[-\pi, \pi)$ gegeben sind durch

$$\begin{aligned} f(t) &= \begin{cases} 0 & \text{für } \frac{1}{2} \leq |t| \leq \pi \\ \sqrt{2\pi} & \text{für } |t| < \frac{1}{2} \end{cases} \\ g(t) &= \begin{cases} 1 - |t| & \text{für } |t| < 1 \\ 0 & \text{für } 1 \leq |t| \leq \pi \end{cases} . \end{aligned}$$

In welchen $x \in \mathbb{R}$ gilt $s_f(x) = f(x)$ bzw. $s_g(x) = g(x)$?

(b) Für Funktionen $\phi, \psi \in R([-\pi, \pi])$ mit $\phi(-\pi) = \phi(\pi)$ und $\psi(-\pi) = \psi(\pi)$, die 2π-periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt seien, ist die *Faltung* von ϕ und ψ definiert durch

$$(\phi * \psi)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t - \tau)\psi(\tau)\, d\tau \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Verifizieren Sie, dass für f und g aus Aufgabenteil (a) gilt

$$g = f * f.$$

Aufgabe 62.
Es sei $f(z) := c_n z^n + \ldots + c_0$ ein Polynom mit komplexen Koeffizienten ($n \in \mathbb{N}, c_n \neq 0$) und R derart, dass

$$R \geq 1, \quad \frac{1}{R}\left(\frac{|c_{n-1}|}{|c_n|} + \ldots + \frac{|c_0|}{|c_n|}\right) \leq \frac{1}{2}$$

gilt. Zeigen Sie: es gilt

$$|f(z)| \geq \frac{1}{2}|c_n||z|^n \quad (z \in \mathbb{C}, |z| \geq R).$$

Geben Sie eine obere Schranke für die Beträge sämtlicher Nullstellen von f an.