Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. G. Herzog
Dr. M. Radosz

WS 2012/13

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

2. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 02.11.2012, 12.30 Uhr

Aufgabe 5 (K).

(a) Schreiben Sie die folgende Teilmenge von $\mathbb{R}$ als Vereinigung von Intervallen.

$$\{x \in \mathbb{R} : \; x \leq 4 + \sqrt{x-2}\}.$$

(b) Für $x, y > 0$ beweisen Sie folgende Ungleichungen:

$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}}.$$

(c) Berechnen Sie mit Hilfe des Binomischen Satzes folgende Summen:

$$(1) \quad \sum_{j=0}^{4} \binom{4}{j} (-1)^j 3^{j+1}; \quad (2) \quad \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} \quad (n \in \mathbb{N}); \quad (3) \quad \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Aufgabe 6 (K). Beweisen Sie folgende Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \quad (q \in \mathbb{R} \setminus \{1\})$;

(c) $n \geq 5 \Rightarrow 2^n > n^2$;

(d) $2^{2n+3} + 2 \cdot 5^{2n-1}$ ist durch 42 teilbar.

Aufgabe 7. Beweisen Sie folgende Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}(-1)^{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$;

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} > \frac{n}{2}$;

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$;

(d) Sei $a_0 = a_1 = 1$. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ sei $a_{m+1} := \frac{a_m + a_{m-1}}{2}$. Dann gilt:

$$a_n \leq \left(\frac{7}{5}\right)^n.$$

bitte wenden!

Aufgabe 8. Man entscheide jeweils (Beweis oder Gegenbeispiel angeben!) ob die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ notwendigerweise gegen 0 konvergiert, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

(a) $|a_n| < \varepsilon^2$;

(b) $|a_n^2 + a_n| < \varepsilon$;

(c) $|a_n \cdot a_{n+1}| < \varepsilon$;

(d) $|a_n \cdot a_m| < \varepsilon$ für alle $m \in \mathbb{N}$.