Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. G. Herzog
Dr. M. Radosz

WS 2012/13

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

3. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 09.11.2012, 12.30 Uhr

Aufgabe 9 (K). Untersuchen Sie jeweils $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

$$\text{(a)}\quad a_n = \frac{n^2+3n-4}{1+n^2+4n^3}; \qquad \text{(b)}\quad a_n = \sqrt{9n^2+2n+1}-3n;$$

$$\text{(c)}\quad a_n = \frac{(1+n)^{42}-n^{42}}{n^{41}}; \quad \text{(d)}\quad a_n = n^4\left(\sqrt[10]{1+3n^{-4}+n^{-9}}-1\right).$$

Hinweis: Binomischer Lehrsatz und geometrische Summenformel.

Aufgabe 10 (K).

(a) Untersuchen Sie die folgenden rekursiv definierten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(1) $a_1 = \dfrac{3}{2}, \quad a_{n+1} = \dfrac{3}{4-a_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$;

(2) $a_1 = 5, a_2 = 4, \quad a_{n+2} = \dfrac{3}{2}a_{n+1} - \dfrac{1}{2}a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis zu (2): Beweisen Sie, dass die Folgenglieder für $n \geq 1$ die explizite Gestalt $a_n = \alpha + \beta \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ mit geeigneten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ besitzen.

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge.

(1) Konvergiert die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n$, falls $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine *konvergente Folge* ist? Begründen Sie Ihre Antwort und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(2) Konvergiert die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n$, falls $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine *Nullfolge* ist? Begründen Sie Ihre Antwort und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 11.

(a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Zeigen Sie:

$$\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Hinweis: Fixieren Sie $\varepsilon > 0$, wählen Sie $m \in \mathbb{N}$ geeignet und machen Sie die Zerlegung

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} a_k + \frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{n} a_k$$

und wählen Sie dann $n_0 \in \mathbb{N}$ geeignet.

(b) Zeigen Sie: Aus $a_n \to a$ $(n \to \infty)$ folgt $\dfrac{a_1+\ldots+a_n}{n} \to a$ $(n \to \infty)$.

(c) Geben Sie eine *divergente* Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, für die die Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\mu_n := \dfrac{a_1+\ldots+a_n}{n}$ konvergiert.

bitte wenden!

Aufgabe 12. Zeigen Sie jeweils, dass die unten angegebene Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Wert a konvergiert und geben Sie zu $\varepsilon = 10^{-10}$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ an, so dass für alle $n \geq n_0$ stets $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt:

$$\text{(a)}\quad a_n = \frac{2n}{n+1}; \qquad\qquad \text{(b)}\quad a_n = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{n+1}+1}}.$$