Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. G. Herzog
Dr. M. Radosz

WS 2012/13

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

4. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 16.11.2012, 12.30 Uhr

Aufgabe 13 (K).

(a) Berechnen Sie für die nachfolgenden Folgen $(a_n)_{n=1}^\infty$ die n-ten Partialsummen $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ und untersuchen Sie $(s_n)_{n=1}^\infty$ auf Konvergenz. Bestimmen Sie gegebenenfalls $\lim_{n\to\infty} s_n$.

(i) $a_n = \dfrac{(-3)^n}{4^n}$ $(n \in \mathbb{N})$; (ii) $a_n = \dfrac{n}{(n+1)!}$ $(n \in \mathbb{N})$;

(iii) $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k}$ $(n \in \mathbb{N})$; (iv) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ $(n \in \mathbb{N})$.

(b) Sei $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine beschränkte Folge positiver Zahlen und $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Zeigen Sie, dass genau einer der beiden Fälle gilt:

(i) $(s_n)_{n=1}^\infty$ ist konvergent

(ii) $\forall c \in \mathbb{N}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : s_n \geq c$.

Aufgabe 14 (K). Bestimmen Sie jeweils für die Folge $(a_n)_{n=1}^\infty$ die Menge der Häufungswerte sowie $\limsup_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n$. Weisen Sie nach, dass Sie jeweils sämtliche Häufungswerte gefunden haben.

(a) $a_n := (-1)^n \cdot \frac{2n+1}{3n+2}$;

(b) $a_n := (1 + (-1)^n) \cdot (-1)^{n(n+1)/2}$;

(c) $a_n := \left(1 + \frac{(-1)^n}{2n}\right)^{3n}$;

(d) $a_n := \begin{cases} 1 - 2^{-n} & \text{für } n = 3k, \quad k \in \mathbb{N}, \\ 2 + \frac{n+1}{n} & \text{für } n = 3k-1, \quad k \in \mathbb{N} \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2n} & \text{für } n = 3k-2, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Aufgabe 15. Untersuchen Sie jeweils die Folge $(a_n)_{n=1}^\infty$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

(a) $a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$ $n \in \mathbb{N}$ mit festen $a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0$;

(b) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{nk}\right)^n$ für $n \in \mathbb{N}$ mit einem festen $k \in \mathbb{N}$;

(c) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n+k}\right)^n$ für $n \in \mathbb{N}$, mit einem festen $k \in \mathbb{N}$;

(d) $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{nk}\right)^n$ für $n \in \mathbb{N}$, mit einem festen $k \in \mathbb{N}$.

bitte wenden!

Aufgabe 16.

(a) Finden Sie Beispiele für Folgen mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ hat jede natürliche Zahl als Häufungswert.

(ii) $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ hat keinen Häufungswert und ist weder nach oben noch nach unten beschränkt.

(iii) $(d_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert gegen 8, ist aber nicht monoton.

(iv) $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ hat 0 als einzigen Häufungswert und divergiert.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(i) Falls die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine divergente Teilfolge besitzt, so divergiert $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

(ii) Die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ besitze die konvergenten Teilfolgen $(a_{2n})_{n=1}^{\infty}$ und $(a_{2n+1})_{n=1}^{\infty}$. Dann konvergiert $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

(ii) Eine Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert genau dann, wenn die drei Teilfolgen $(a_{2n})_{n=1}^{\infty}$, $(a_{2n+1})_{n=1}^{\infty}$ und $(a_{3n})_{n=1}^{\infty}$ konvergieren.