Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. G. Herzog
Dr. M. Radosz

WS 2012/13

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

5. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 23.11.2012, 12.30 Uhr

Aufgabe 17 (K). Sei $\alpha > 0$ fest vorgegeben. Die Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{3}{4\alpha} \\ a_{n+1} &= 2a_n - \alpha a_n^2 \quad (n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass (a_n) das Cauchy-Kriterium erfüllt, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \; |a_n - a_m| < \varepsilon \quad (n, m \geq n_0).$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst die Ungleichung $|a_{n+k+1} - a_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|a_{n+k} - a_n|$ für beliebige $n, k \geq 1$.

Aufgabe 18.

(a) Sei (a_n) rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned} a_1 &= \xi \quad \text{mit einem fest gewählten } \xi > 0 \\ a_{n+1} &= \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \right)^{-1} \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass (a_n) gegen 0 konvergiert und $s_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$ divergiert.

(b) Sei (a_n) rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned} a_1 &= \xi \quad \text{mit einem fest gewählten } \xi \in \mathbb{R} \\ a_{n+1} &= \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu + \frac{2+n}{n2^n} \quad (n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass (a_n) konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.
Hinweis zu (b): Zeigen Sie, dass $a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{2^n}$ für alle $n \geq 2$ gilt und benutzen Sie Teleskopsummen.

Aufgabe 19 (K). Beweisen Sie folgende Aussagen.

(a) Seien $(a_n), (b_n)$ beschränkte Folgen. Dann gilt

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n).$$

Geben Sie Folgen $(a_n), (b_n)$ an für die

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) < \liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n < \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n)$$

gilt.

bitte wenden!

(b) Sei (a_n) beschränkt und (b_n) konvergent mit $0 \le \lim_{n\to\infty} b_n$. Dann gilt

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Aufgabe 20. Sei (a_n) eine Folge mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) Ist (a_n) monoton, dann besitzt (a_n) höchstens einen Häufungswert.

(b) Die Folge (a_n) ist unbeschränkt genau dann wenn $(\frac{1}{a_n})$ den Häufungswert 0 besitzt.

Welche Eigenschaft muss die Folge in (a) zusätzlich erfüllen, damit *genau ein* Häufungswert existiert?