Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. G. Herzog
Dr. M. Radosz

WS 2012/13

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

6. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 30.11.2012, 12.30 Uhr

Aufgabe 21 (K). Untersuchen Sie die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ für die nachstehenden Folgen (a_n) auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a) $a_n = \dfrac{\sqrt[n]{n}}{n!}$;	(b) $a_n = \dfrac{n+4}{n^2-3n+1}$;
(c) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+7}$;	(d) $a_n = \dfrac{(1+(-1)^n)^n n^4}{3^n}$;
(e) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$;	(f) $a_n = \dfrac{n+(-3)^n}{3^n n}$;
(g) $a_n = \left(\dfrac{n^2+(-1)^n}{n^2+2}\right)^{n^3}$;	(h) $a_n = (-1)^n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.

Aufgabe 22. Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) Es sei $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) Falls $a_n - b_n \to 0$ $(n \to \infty)$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(c) Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergiert, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(d) Falls $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_n+1}$ konvergiert.

Aufgabe 23 (K).

(a) Es sei $p \in \mathbb{N}$ fest sowie $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Zeigen Sie, dass $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+p})$ konvergiert und bestimmen Sie den Wert der Reihe.

(b) Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen konvergieren und bestimmen Sie ihre Reihenwerte.

(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$;	*(ii)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$;
(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$;	*(iv)* $\displaystyle\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{n^2-p^2}$ für $p \in \mathbb{N}$ fest.

bitte wenden!

Aufgabe 24. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$a_n := \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad \text{und} \quad b_n := \frac{(1 + \frac{1}{2}(-1)^n)^n}{n^2}.$$

(a) Beweisen Sie: Es gilt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ divergent ist.

(c) Warum ist das Leibnizkriterium hier nicht anwendbar?

(d) Was kann man mit dem Quotientenkriterium über die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sagen? Was liefert das Wurzelkriterium?