Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. G. Herzog
Dr. M. Radosz

WS 2012/13

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

7. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 07.12.2012, 12.30 Uhr

Aufgabe 25 (K). Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen sowie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, in denen die Potenzreihe konvergiert.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n3^n + 1)\, x^n$; (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{n})^n\, x^n$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\, x^n$; (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2\, x^n$;

(e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{(n-1)^2}\, x^n$; (f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n)} x^{2n}$;

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(x-1)^n$; (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)x^n$.

Aufgabe 26 (K).

(a) Bestimmen Sie das Cauchy-Produkt der Reihen $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}$ und $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n}$ und berechnen Sie dessen Wert.

(b) Definiere $a_0 := 0$ und $a_n := \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dass aber das Cauchy-Produkt der Reihe mit sich selbst divergiert. Warum lässt sich der Satz aus der Vorlesung über die Konvergenz des Cauchy-Produktes nicht anwenden?

Aufgabe 27. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen, sowie alle $x \in \mathbb{R}$, in denen die Potenzreihe konvergiert. Welche Funktion wird jeweils durch die Potenzreihe dargestellt?

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n-1}{(n+1)!}\, x^n$; (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,(x+1)^{2n+2}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)\, x^n$.

Aufgabe 28.

(a) Beweisen Sie mit Hilfe des Cauchyprodukts die Additionstheoreme:

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R});\\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

(b) Beweisen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 \qquad (x \in \mathbb{R});\\ \cos(x) + \cos(y) &= 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad (x, y \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$