Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. G. Herzog
Dr. M. Radosz

WS 2012/13

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

8. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 14.12.2012, 12.30 Uhr

Aufgabe 29.

(a) Berechnen Sie die q-adische Entwicklung von $1/5$ für $q = 3$ und für $q = 4$.

(b) Sei $q \in \mathbb{N}$ mit $q \geq 3$ und $0,212121212121\ldots$ die q-adische Entwicklung einer Zahl $a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie von q abhängige Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ mit $a = m/n$.

Aufgabe 30 (K). Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3} \right)$; (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{42} \left(\left(1 + \dfrac{42}{x}\right)^{42} - 1 \right)$;

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+x} - 2}{x}$; (d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - x - 6}$;

(e) $\lim\limits_{x\to\infty} x \left[\dfrac{1}{x} \right]$; (f) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{3/2} \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x} \right)$;

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x} \right)$; (h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{E(\sin x) - 1}{x}$.

Aufgabe 31 (K). Bestimmen Sie jeweils alle $x_0 \in \mathbb{R}$, in denen die folgenden Funktionen stetig sind.

(a)
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ f(x) &= \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} & x \notin \mathbb{N} \\ \dfrac{4x - 6}{x + 1} & x \in \mathbb{N} \end{cases} \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ f(x) &= \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ f(x) &= [x] + \sqrt{x - [x]} \end{aligned}$$

(d) $f : \{-1\} \cup [0, 1] \to \mathbb{R}$
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = -1 \\ 2 & x = 0 \\ E\left(-\dfrac{\sin x}{x^2}\right) & x \in (0, 1] \end{cases}$$

Aufgabe 32. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gelte $f(x + y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Dann ist die Funktion f genau dann stetig auf $\mathbb{R}$, wenn sie in 0 stetig ist.

(b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(x) = f(2x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist f konstant.

(c) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und es gelte $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. Dann gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.