Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. G. Herzog
Dr. M. Radosz

WS 2012/13

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

9. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 21.12.2012, 12.30 Uhr

Aufgabe 33. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Gilt für die stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0,$$

so gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \leq |f(x_0)|$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wenn die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig ist und $f(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt, dann ist die Funktion $1/f$ beschränkt.

Aufgabe 34 (K).

(a) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, und sei $f : I \to I$ stetig. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt besitzt, dass also ein $x \in I$ existiert mit $f(x) = x$.

(b) Bleibt die Aussage in (a) wahr, wenn man die Voraussetzung, I sei kompakt, fallen lässt?

(c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 35 (K).

(a) Untersuchen Sie, ob die Grenzwerte existieren, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} \quad (\alpha > 0)$; (ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^\beta \log x \quad (\beta > 0)$;

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} \quad (a > 0)$; (iv) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^{(x^2)} - \cos x}{\sin(x^2)} \quad (a > 0)$.

(b) Die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{für } 0 < |x| \leq 1 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

(i) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

(ii) Bestimmen Sie den Wertebereich $f([-1, 1])$ von f.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in [-1, 1]$ gilt.

(iii) Zeigen Sie, dass f eine Umkehrfunktion besitzt. Berechnen Sie f^{-1}.

(iv) Zeigen Sie, dass f^{-1} streng monoton wachsend ist.

bitte wenden!

Aufgabe 36.

(a) Es sei $a > 0$, und die Folgen $(x_n)_{n\geq 0}$ und $(y_n)_{n\geq 1}$ seien definiert durch

$$x_0 := a\,, \qquad x_n := \sqrt{x_{n-1}}\,, \quad y_n := 2^n(x_n - 1) \quad (n \in \mathbb{N})\,.$$

Zeigen Sie, dass dann $y_n \to \log a$ für $n \to \infty$ gilt.

(b) Beweisen Sie für $x, y > 0$ die Abschätzung

$$\frac{\log x + \log y}{2} \leq \log \frac{x+y}{2}\,.$$

(c) Zeigen Sie, dass $\log x < x - 1$ für alle $x > 0$ mit $x \neq 1$ gilt.