Lösungen zum 1. UB

Aufgabe 1 (K) (a)

(1) Es gilt

$$|x-4| = |x+1| \quad\Leftrightarrow\quad (x-4)^2 = (x+1)^2 \quad\Leftrightarrow\quad x^2 - 8x + 16 = x^2 + 2x + 1$$
$$\Leftrightarrow\quad 10x = 15 \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{3}{2}. \Leftrightarrow x \in \left[\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

Alternativ führen auch geometrische Überlegungen zum Ziel: Gesucht sind diejenigen $x \in \mathbf{R}$, die denselben Abstand zu 4 wie zu -1 haben, d.h. x liegt genau in der Mitte: $x = \frac{4+(-1)}{2} = \frac{3}{2}$.

Eine weitere Alternative besteht darin, die Fallunterscheidung $x \in (-\infty, -1]$, $x \in (-1, 4]$, $x \in (4, \infty)$ durchzuführen, um die Beträge aufzulösen...

(2) Es ist

$$|2 - |2-x|| \leqslant 1 \quad\Leftrightarrow\quad -1 \leqslant 2 - |2-x| \leqslant 1 \quad\Leftrightarrow\quad -3 \leqslant -|2-x| \leqslant -1$$
$$\Leftrightarrow\quad 1 \leqslant |2-x| \leqslant 3 \quad\Leftrightarrow\quad 1 \leqslant 2-x \leqslant 3 \text{ oder } -3 \leqslant 2-x \leqslant -1$$
$$\Leftrightarrow\quad -1 \leqslant -x \leqslant 1 \text{ oder } -5 \leqslant -x \leqslant -3 \quad\Leftrightarrow\quad -1 \leqslant x \leqslant 1 \quad\text{oder}\quad 3 \leqslant x \leqslant 5$$
$$\Leftrightarrow\quad x \in [-1, 1] \cup [3, 5].$$

(3) Auf keinen Fall kommt $x = 1$ in Frage, denn die Division durch 0 ist nicht definiert. Ansonsten multiplizieren wir die Ungleichung mit $1 - x$. Dabei müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

1. Fall: Sei zunächst $1 - x > 0$, also $x < 1$. Multiplikation mit $1 - x$ liefert

$$2x + \frac{1}{1-x} \geqslant 1 \quad\Leftrightarrow\quad 2x(1-x) + 1 \geqslant 1 - x \quad\Leftrightarrow\quad 2x - 2x^2 + 1 \geqslant 1 - x$$
$$\Leftrightarrow\quad 3x - 2x^2 \geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad x(3-2x) \geqslant 0.$$

Die letzte Ungleichung gilt genau dann, wenn $x \geqslant 0$ und $3 - 2x \geqslant 0$ oder aber wenn $x \leqslant 0$ und $3 - 2x \leqslant 0$.

$x \geqslant 0$ und $3 - 2x \geqslant 0$ bedeutet $x \geqslant 0$ und $x \leqslant 3/2$, also $0 \leqslant x \leqslant 3/2$. Da wir im 1. Fall nur $x < 1$ betrachten, ergibt sich also $0 \leqslant x < 1$.

$x \leqslant 0$ und $3 - 2x \leqslant 0$ bedeutet $x \leqslant 0$ und $x \geqslant 3/2$, was nicht gleichzeitig möglich ist.

2. Fall: Jetzt sei $1 - x < 0$, also $x > 1$. Dann dreht sich bei Multiplikation mit $1 - x$ das $\geqslant$ um, und wir erhalten

$$2x + \frac{1}{1-x} \geqslant 1 \quad\Leftrightarrow\quad 2x(1-x) + 1 \leqslant 1 - x \quad\Leftrightarrow\quad x(3-2x) \leqslant 0.$$

Diese Ungleichung gilt genau dann, wenn $x \geqslant 0$ und $3 - 2x \leqslant 0$ oder aber wenn $x \leqslant 0$ und $3 - 2x \geqslant 0$.

$x \geqslant 0$ und $3 - 2x \leqslant 0$ bedeutet $x \geqslant 0$ und $x \geqslant 3/2$, also $x \geqslant 3/2$.

$x \leqslant 0$ und $3 - 2x \geqslant 0$ bedeutet $x \leqslant 0$ und $x \leqslant 3/2$, also $x \leqslant 0$. Da wir im 2. Fall nur $x > 1$ betrachten, ist dies hier nicht möglich.

Insgesamt: Die Ungleichung ist genau dann erfüllt, wenn $0 \leqslant x < 1$ oder $x \geqslant 3/2$.

$$\Leftrightarrow x \in [0, 1) \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$$

(b) (1) Wir erkennen sofort, dass $B := \{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\}$ nach oben beschränkt ist. Zur Bestimmung des Supremums, also der kleinsten oberen Schranke, bemerken wir, dass der Ausdruck $(-1)^n + \frac{1}{n}$ für ungerade natürliche Zahlen $\leqslant 0$ ist. Da $(-1)^n = 1$ für gerade $n \in \mathbf{N}$ gilt und $n \mapsto \frac{1}{n}$ fallend ist, folgern wir aus $(-1)^n + \frac{1}{n} \leqslant (-1)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$: $\sup B = \max B = \frac{3}{2}$.

Nun zur unteren Schranke. Wir behaupten: $\inf B = -1 \notin B$, d.h. das Minimum von B existiert nicht.

Wir müssen uns zunächst davon überzeugen, dass -1 überhaupt eine untere Schranke von B ist. Für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt in der Tat

$$(-1)^n + \frac{1}{n} \geqslant (-1)^n \geqslant -1.$$

Nun zeigen wir, dass -1 auch die größte untere Schranke ist. Dazu nehmen wir an, dass es eine größere untere Schranke K gibt, etwa $K = -1 + \varepsilon$ mit einem $\varepsilon > 0$, und führen dies zu einem Widerspruch. Es soll also gelten

$$K \leqslant (-1)^n + \frac{1}{n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbf{N}.$$

Da dies insbesondere für ungerade n gilt, folgt für alle ungeraden $n \in \mathbf{N}$

$$-1 + \varepsilon \leqslant -1 + \frac{1}{n} \quad\Leftrightarrow\quad \varepsilon \leqslant \frac{1}{n} \quad\Leftrightarrow\quad n \leqslant \frac{1}{\varepsilon}.$$

Dies kann jedoch nicht sein, weil die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen nicht nach oben beschränkt ist. Also ist die Annahme falsch, und es gilt $-1 = \inf B$.

(2) Mit quadratischer Ergänzung erkennen wir

$$x^2 - x + 2 = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geqslant \frac{7}{4}.$$

Wegen $(\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} + 2 = \frac{7}{4} \in \{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\}$ folgt

$$\min\{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\} = \inf\{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\} = \frac{7}{4}.$$

Da $\{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\}$ nach oben unbeschränkt ist, existieren Maximum und Supremum von $\{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\}$ nicht.

(3) Sei $M_3 := \{ \frac{x|x|}{1+x^2} : x \in \mathbb{R} \}$

Beh: $\sup M_3 = 1$, $\inf M_3 = -1$, min, max ex. nicht.

Bew: zunächst stellen wir fest daß:

$\frac{x|x|}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$ für $x \geq 0$ und $\frac{x|x|}{1+x^2} = \frac{-|x|^2}{1+|x|^2}$ für $x < 0$.

Wir können M_3 als Vereinigung [der] Mengen $M_{3,1} := \{ \frac{x^2}{1+x^2} : x \in \mathbb{R} \}$ und $M_{3,2} := \{ \frac{-x^2}{x^2+1} : x \in \mathbb{R} \}$ schreiben:

$$M_3 = M_{3,1} \cup M_{3,2}.$$

Für alle $a \in M_{3,1}$, $b \in M_{3,2}$ gilt:

$$b \leq a,$$

woraus folgt $\sup M_3 = \sup M_{3,1}$, $\inf M_3 = \inf M_{3,2}$.

- Wegen $x^2 \leq x^2 + 1$ folgt $\frac{x^2}{x^2+1} \leq 1$ für $x \in \mathbb{R}$, somit ist 1 OS für M_3. Angenommen $1 - \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$ wäre OS für M_3. Dann wäre für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{x^2}{1+x^2} \leq 1 - \varepsilon \iff x^2 \leq (1-\varepsilon)(x^2+1)$$

$$\iff x^2 \leq x^2 + 1 - \varepsilon x^2 - \varepsilon \iff 0 \leq 1 - \varepsilon(x^2+1),$$

was nicht stimmt sofern x^2 groß genug gewählt wird. Damit kann $1-\varepsilon$ keine OS für M_3 sein und 1 ist die kleinste OS für M_3.
$\Rightarrow 1 = \sup M_3$.

- M_3 hat kein Max., denn andernfalls (S) gäbe es ein $x \geq 0$ mit $\frac{x^2}{x^2+1} = 1$. Daraus würde folgen $x^2 = x^2 + 1$, also $0 = 1$, Widerspruch!

- Da $M_{3,2} = -M_{3,1}$ folgt nach Satz aus der Übung $\inf M_3 = \inf M_{3,2} = \inf(-M_{3,1})$ $= -\sup M_{3,1} = -1$.
- $\min M_3$ ex. nicht, da sonst $-\frac{x^2}{x^2+1} = -1$ für ein $x \in \mathbb{R}$ gelten würde, also der Widerspruch $0 = 1$.

⌈Hinweis: Wenn im Tutorium vorher die Menge $\{\frac{x^2}{x^2+1} : x \in \mathbb{R}\}$ besprochen wurde, dürfen die Studenten darauf verweisen.⌋

Aufgabe 2 (K)

(a) (1) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \iff \frac{x^2+y^2}{xy} \geq 2$

$\overset{x,y>0}{\iff} x^2+y^2 \geq 2xy \iff x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$

$\iff (x-y)^2 \geq 0$, was eine wahre Aussage ist.

(2) $\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leq \frac{x+y}{2} \iff \frac{2xy}{x+y} \leq \frac{x+y}{2}$

$\iff 4xy \leq (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$\Leftrightarrow \quad 0 \leq x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$ ✓ (4)

was wieder eine wahre Aussage ist

3) $\frac{y^2}{x} + \frac{x^2}{y} \geqslant x+y \Leftrightarrow \frac{x^3+y^3}{xy} \geqslant x+y$

$x, y > 0$

$\Leftrightarrow x^3 + y^3 \geqslant x^2 y + y^2 x \Leftrightarrow x^3 + y^3 - x^2 y - x y^2 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2(x-y) + y^2(y-x) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \quad (x^2 - y^2) \cdot (x-y) \geqslant 0$

Das ist eine wahre Aussage. Um das einzusehen betrachte die Fälle $x \leq y$ und $x > y$.

(b) Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Wegen $0 \leqslant |x+y| \leqslant |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung!) erhalten wir

$$0 < 1 \leqslant 1 + |x+y| \leqslant 1 + |x| + |y|,$$

woraus

$$\frac{1}{1+|x+y|} \geqslant \frac{1}{1+|x|+|y|} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{1+|x+y|} \leqslant -\frac{1}{1+|x|+|y|} \qquad (2)$$

folgt. Mit zweimaliger Verwendung des Tipps kommen wir auf

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} = 1 - \frac{1}{1+|x+y|} \overset{(2)}{\leqslant} 1 - \frac{1}{1+|x|+|y|} = \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|}.$$

Damit ist die erste behauptete Ungleichung bewiesen. Nun zur zweiten: Es gilt

$$\begin{aligned} & |x| + |y| \geqslant |x| \geqslant 0 \\ \Rightarrow \; & 1 + |x| + |y| \geqslant 1 + |x| \geqslant 1 > 0 \\ \Rightarrow \; & \frac{1}{1+|x|+|y|} \leqslant \frac{1}{1+|x|} \\ \overset{|x| \geqslant 0}{\Rightarrow} \; & \frac{|x|}{1+|x|+|y|} \leqslant \frac{|x|}{1+|x|}. \end{aligned}$$

Ebenso (vertausche x und y) bekommen wir

$$\frac{|y|}{1+|x|+|y|} \leqslant \frac{|y|}{1+|y|}.$$

Damit ergibt sich

$$\frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} = \frac{|x|}{1+|x|+|y|} + \frac{|y|}{1+|x|+|y|} \leqslant \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

<u>Aufgabe 3(a)</u> Es ist leicht zu zeigen, dass folgendes gilt: „Sei A eine nichtleere nach oben beschr. Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $-A := \{-a \mid a \in A\}$. Dann gilt: $-A$ ist nach unten beschr. und $\inf(-A) = -\sup A$.“ Wende dies auf $A = -M$ an.

$M_3 = \left\{ \frac{3-\varepsilon}{2+\varepsilon} \;\middle|\; 3 > \varepsilon > 0 \right\}$ Aufgabe 3 (b) (2)

5

obere Schranke $\frac{3-\varepsilon}{2+\varepsilon} \leq \frac{3}{2+\varepsilon} < \frac{3}{2}$

untere Schranke $\frac{3-\varepsilon}{2+\varepsilon} > 0$

Beh: $\frac{3}{2} - \delta_1, \delta_1 > 0$ keine obere Schranke Angenommen, $\frac{3}{2} - \delta_1 > 0$

$\delta_2, \delta_2 > 0$ keine untere Schranke $\delta_2 < \frac{3}{2}$

z.z.: $\exists\, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0,3)$ mit $\frac{3-\varepsilon_1}{2+\varepsilon_1} > \frac{3}{2} - \delta_1$, $\frac{3-\varepsilon_2}{2+\varepsilon_2} < \delta_2$

$\Leftrightarrow 3 - \varepsilon_1 > 3 + \frac{3}{2}\varepsilon_1 - 2\delta_1 - \delta_1\varepsilon_1$, $3 - \varepsilon_2 < 2\delta_2 + \varepsilon_2\delta_2$

$\Leftrightarrow 2\delta_1 > \varepsilon_1\left(\frac{5}{2} - \delta_1\right)$; $3 - 2\delta_2 < (1+\delta_2)\varepsilon_2$

$\Leftrightarrow \frac{2\delta_1}{5/2 - \delta_1} > \varepsilon_1$, $\frac{3-2\delta_2}{1+\delta_2} < \varepsilon_2$

Wähle $0 < \varepsilon_1 < \min\left\{3, \frac{2\delta_1}{5/2 - \delta_1}\right\}$

Wähle $3 > \varepsilon_2 > \frac{3-2\delta_2}{1+\delta_2}$

dies ist nur möglich, wenn $\frac{3-2\delta_2}{1+\delta_2} < 3$, und dies gilt

denn: $\frac{3-2\delta_2}{1+\delta_2} \overset{\delta_2>0}{<} \frac{3}{1+\delta_2} \overset{\delta_2>0}{<} 3$

$\Leftrightarrow$ $= 5$

Ergebnis: $\frac{3}{2} - \delta_1, \delta_1 > 0$ ist keine obere Schranke;

$\delta_2 > 0$ ist keine untere Schranke

$\Rightarrow \sup M_3 = \frac{3}{2} \notin M_3$

$\inf M_3 = 0 \notin M_3$.

Aufgabe 3 (b) (3)

$M_3 = \{x : \exists y \in \mathbb{R} : (x+2)^2 + 4y^2 < 9\}$

$= \{x \mid (x+2)^2 < 9\}$

$= \{x \mid |x+2| < 3\}$

Löse: $|x+2| < 3$

1. Fall $x > -2$

$x+2 < 3$

$\Leftrightarrow x < 1$

d.h. $-2 < x < 1$

2. Fall $x \leq -2$

$-2-x < 3$

$-5 < x$

d.h. $-5 < x \leq -2$

Ergebnis: $M_3 = \{x \mid -5 < x < 1\}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l}\sup M_3 = 1 \notin M_3 \\ \inf M_3 = -5 \notin M_3\end{array}}$

Aufgabe 4 (b)

Wiederum seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir betrachten die beiden Fälle $x - y \geqslant 0$ und $x - y < 0$.

1. Fall: $x \geqslant y$. Dann ist $|x-y| = x - y$, und es gilt

$$\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y+x-y}{2} = \frac{2x}{2} = x = \max\{x,y\},$$
$$\frac{x+y-|x-y|}{2} = \frac{x+y-(x-y)}{2} = \frac{2y}{2} = y = \min\{x,y\}.$$

2. Fall: $x < y$. Dann ist $|x-y| = -(x-y) = -x+y$, und es gilt

$$\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y-x+y}{2} = \frac{2y}{2} = y = \max\{x,y\},$$
$$\frac{x+y-|x-y|}{2} = \frac{x+y+x-y}{2} = \frac{2x}{2} = x = \min\{x,y\}.$$

Aufgabe 4 (a)

(1) $\frac{1}{|2-x|} \leq 7$, $x \neq 2$ (sonst undef. Ausdruck)

Löse also $\frac{1}{7} \leq |2-x|$

1. Fall $x<2$

Löse $\frac{1}{7} \leq 2-x$

$\Leftrightarrow x \leq 2-\frac{1}{7} = \frac{13}{7}$

Lösungen im 1. Fall: $x \leq \frac{13}{7}$

2. Fall $x>2$

Löse $\frac{1}{7} \leq x-2$

$\Leftrightarrow \frac{15}{7} \leq x$

Lösungen im 2. Fall $x \geq \frac{15}{7}$

$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{13}{7} \text{ oder } x \geq \frac{15}{7}\}$

$\boxed{\text{Lösungen: } x \in (-\infty, \frac{13}{7}] \cup [\frac{15}{7}, \infty) = \mathbb{R} \setminus (\frac{13}{7}, \frac{15}{7})}$

(2) $\frac{1}{1-x} \leq 1-\frac{x}{2}$, $x \neq 1$

1. Fall $x<1$

Löse $1 \leq (1-\frac{x}{2})(1-x)$

$\Leftrightarrow 1 \leq 1-x-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2}x \leq \frac{x^2}{2}$

$\Leftrightarrow 3x \leq x^2$

1. Unterfall $x \leq 0$

jedes solche x ist Lösung

2. Unterfall $x>0$

$3x \leq x^2$, $x>0$

$\Leftrightarrow 3 \leq x$, $x>0$

also keine Lösungen

Lösungen im 1. Fall $x \leq 0$

2. Fall $x>1$

$1 \geq 1-x-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}$

$\Leftrightarrow 3x \geq x^2$

wegen $x>1>0$

$\Leftrightarrow 3 \geq x$

Lösungen im 2. Fall $1<x\leq 3$

Ergebnis: $\boxed{x \in (-\infty,0] \cup (1,3]}$

Aufgabe 4 (a) (3)

$$1 - \left|\frac{5}{4+2x}\right| \leq \frac{x}{2} \quad , \quad x \neq -2$$

1. Fall $x > -2 \Leftrightarrow 2x > -4$

löse: $1 - \frac{5}{4+2x} \leq \frac{x}{2} \quad \Big| \cdot (4+2x)$

$\Leftrightarrow 4+2x-5 \leq 2x+x^2$

$\Leftrightarrow -1 \leq x^2$
gilt immer

Lösung: $x > -2$

2. Fall $x < -2 \Leftrightarrow 2x < -4$

löse: $1 + \frac{5}{4+2x} \leq \frac{x}{2} \quad \Big| \cdot (4+2x) < 0$

$\Leftrightarrow 4+2x+5 \geq 2x+x^2$

$\Leftrightarrow 9 \geq x^2$

$\Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$

Lösung: $-3 \leq x < -2$

Ergebnis: $x \in [-3,-2) \cup (-2,\infty)$

Aufgabe 3 (b) (1) $M := \{x^4 : x \in [-5,1)\}$

Für $x \in [-5,1)$ gilt:

$0 \leq x^4 \leq (-5)^4 = 625.$

Es gilt: $0 = 0^4 \in M$ sowie $625 = (-5)^4 \in M$

$\Rightarrow \sup M = \max M = 625$

$\inf M = \min M = 0$