Lösungen zum 14. Übungsblatt

Aufgabe 53

$(\ln x = \log x)$

(a) Hier kann man sofort eine Stammfunktion hinschreiben:

$$\int_0^1 (1+2x)^3\,dx = \tfrac{1}{8}(1+2x)^4\Big|_{x=0}^1 = \tfrac{1}{8}(3^4 - 1^4) = 10\,.$$

(b) Hier wenden wir die Substitutionsregel mit $g(t) = \sqrt{t}$ an. Wir ersetzen also $\sqrt{t}$ durch x und $g'(t)\,dt = (2\sqrt{t}\,)^{-1}\,dt$ durch dx. Dabei müssen wir auch die Integrationsgrenzen anpassen: $t = 1$ entspricht $x = g(1) = 1$ und $t = 4$ entspricht $x = g(4) = 2$.

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}\,(1+\sqrt{t}\,)}\,dt &= \int_1^4 \frac{2}{1+\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt \\ &= \int_1^2 \frac{2}{1+x}\,dx = 2\ln|1+x|\,\Big|_{x=1}^2 = 2(\ln(3) - \ln(2)) = 2\ln\tfrac{3}{2}\,.\end{aligned}$$

(c) Um dieses Integral zu berechnen, verwenden wir partielle Integration für $f(x) = \ln x$ und $g'(x) = x$. Mit $f'(x) = x^{-1}$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ folgt

$$\begin{aligned}\int_1^e x\ln x\,dx &= \int_1^e f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_{x=1}^e - \int_1^e f'(x)g(x)\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}x^2\ln x\Big|_{x=1}^e - \int_1^e \tfrac{1}{2}x^2x^{-1}\,dx = \tfrac{1}{2}(e^2\ln e - \ln 1) - \int_1^e \tfrac{1}{2}x\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}e^2 - \left(\tfrac{1}{4}x^2\right)\Big|_{x=1}^e = \tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{4}(e^2-1) = \tfrac{1}{4}(e^2+1)\,.\end{aligned}$$

(d)

$$\int_0^\pi \sin^4 x\,dx = \int_0^\pi \underset{\downarrow}{\sin^3 x}\;\underset{\uparrow}{\sin x}\,dx = \Big[-\cos x\,\sin^3 x\Big]_0^\pi + \int_0^\pi \cos^2 x\cdot 3\sin^2 x\,dx$$

$$= \int_0^\pi 3(1-\sin^2 x)\cdot\sin^2 x\,dx$$

$$\Rightarrow\; 4\int_0^\pi \sin^4 x\,dx = \int_0^\pi 3\sin^2 x\,dx$$

Aus der Vorlesung wissen wir: $\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x - \sin x\cos x)$

$$\Rightarrow\; \int_0^\pi \sin^4 x\,dx = \frac{3}{8}\Big[x - \sin x\cos x\Big]_0^\pi = \frac{3}{8}\pi\,.$$

(e) Wir substituieren zunächst $t = \sqrt{x}$, d.h. $x = t^2$. Dann ist $dx = 2t\,dt$ und aus $x : 1 \to 4$ ergibt sich $t : 1 \to 2$

$$\int_1^4 \arctan\sqrt{\sqrt{x}-1}\,dx = \int_1^2 \arctan(\sqrt{t-1}) \cdot 2t\,dt\,;$$

nun substituieren wir $u = \sqrt{t-1}$, also $t = u^2+1$, $dt = 2u\,du$, $t : 1 \to 2$ wird zu $u : 0 \to 1$,

$$= \int_0^1 \arctan(u) \cdot 2(u^2+1) \cdot 2u\,du = \int_0^1 (4u^3+4u)\arctan(u)\,du\,.$$

(Natürlich hätten wir die beiden Substitutionen auch zu einer zusammenfassen können.) Dann führen wir eine partielle Integration aus mit $f(u) = \arctan(u)$ und $g'(u) = 4u^3+4u$:

$$\begin{aligned}
&= (u^4+2u^2)\arctan(u)\,\Big|_{u=0}^1 - \int_0^1 (u^4+2u^2)\frac{1}{1+u^2}\,du\\
&= 3\arctan(1) - \int_0^1 \frac{(u^2+1)^2-1}{1+u^2}\,du = \tfrac{3}{4}\pi - \int_0^1 (u^2+1)\,du + \int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\,du\\
&= \tfrac{3}{4}\pi - (\tfrac{1}{3}u^3+u)\Big|_{u=0}^1 + \arctan(u)\Big|_{u=0}^1 = \tfrac{3}{4}\pi - \tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{4}\pi = \pi - \tfrac{4}{3}\,.
\end{aligned}$$

(f) $$\int_0^1 \arcsin x\,dx = \int_0^1 \underset{\uparrow}{1} \cdot \underset{\downarrow}{\arcsin x}\,dx = \big[x \arcsin x\big]_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= \arcsin 1 + \int_0^1 \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= \arcsin 1 + \big[\sqrt{1-x^2}\,\big]_0^1$$

$$= \arcsin 1 - 1 = \frac{\pi}{4} - 1\,.$$

(g) Gemäß Additionstheorem gilt

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin 2t}{1-\sin t}\,dt = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{2\sin t\cos t}{1-\sin t}\,dt;$$

daher liefert die Substitution $x = \sin t$, $dx = \cos t\,dt$

$$\begin{aligned}
&= \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{2x}{1-x}\,dx = \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{2(x-1)+2}{1-x}\,dx = \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} -2\,dx + \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{2}{1-x}\,dx\\
&= -2(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}-\tfrac{1}{2}) - 2\ln|1-x|\,\Big|_{x=1/2}^{\sqrt{3}/2} = 1-\sqrt{3} - 2\big(\ln(1-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}) - \ln(1-\tfrac{1}{2})\big)\\
&= 1-\sqrt{3} - 2\ln(2-\sqrt{3})\,.
\end{aligned}$$

(h) Es gilt: $2+4t-t^2 = -(t-2)^2+6$

$$= 6\left(1-\tfrac{1}{6}(t-2)^2\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2+4t-t^2}}\,dt = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{1-\frac{1}{6}(t-2)^2}}\,dt$$

$$= \left[\arcsin\left(\frac{t-2}{\sqrt{6}}\right)\right]_{t=0}^{t=2} = \arcsin 0 - \arcsin\frac{-2}{\sqrt{6}}$$

$$= \arcsin\frac{2}{\sqrt{6}} = \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Aufgabe 54

(a)

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung (Beachte: auf Intervallen der Form $[\sqrt{k\pi}, \sqrt{(k+1)\pi}]$ wechselt $\sin(x^2)$ nicht das Vorzeichen) existiert eine Zahl ξ_k zwischen $\sqrt{k\pi}$ und $\sqrt{(k+1)\pi}$ mit der Eigenschaft

$$\int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} \sin(x^2)\,dx = \int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} \frac{x\sin(x^2)}{x}\,dx = \frac{1}{\xi_k}\int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} x\sin(x^2)\,dx\,.$$

Wir müssen also nur noch zeigen, dass das letzte Integral den Wert $(-1)^k$ hat. Dazu substituieren wir $t = x^2$. Dies liefert $dt = 2x\,dx$ und damit

$$\int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} x\sin(x^2)\,dx = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \tfrac{1}{2}\sin(t)\,dt = \frac{1}{2}\Big[-\cos t\Big]_{k\pi}^{(k+1)\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\underbrace{\cos((k+1)\pi)}_{(-1)^{k+1}} + \underbrace{\cos k\pi}_{(-1)^k}\Big] = (-1)^k\,.$$

(b) (i) Die Behauptung ist gezeigt, wenn wir beweisen, dass $\int_0^{\sqrt{\alpha\pi}} \sin(x^2)\,dx$ für $\alpha \to \infty$ konvergiert. Sei also $\alpha \geq 1$ beliebig. Mit $[\alpha]$ bezeichnen wir die größte natürliche Zahl, die noch $\leq \alpha$ ist. Es ergibt sich

$$\int_0^{\sqrt{\alpha\pi}} \sin(x^2)\,dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2)\,dx + \sum_{k=1}^{[\alpha]-1}\int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} \sin(x^2)\,dx + \int_{\sqrt{[\alpha]\pi}}^{\sqrt{\alpha\pi}} \sin(x^2)\,dx\,.$$

Die hier auftretende Summe lässt sich gemäß ~~4~~ (a) schreiben als

$$\sum_{k=1}^{[\alpha]-1} \frac{(-1)^k}{\xi_k}, \quad \text{mit } \xi_k \text{ zwischen } \sqrt{k\pi} \text{ und } \sqrt{(k+1)\pi}.$$

Die Summe konvergiert also für $\alpha \to \infty$ nach dem Leibnizkriterium. Es bleibt nur noch zu zeigen, dass auch das hintere Integral konvergiert. Die Abschätzung

$$\left|\int_{\sqrt{[\alpha]\pi}}^{\sqrt{\alpha\pi}} \sin(x^2)\,dx\right| \leq \int_{\sqrt{[\alpha]\pi}}^{\sqrt{\alpha\pi}} |\sin(x^2)|\,dx \leq \int_{\sqrt{[\alpha]\pi}}^{\sqrt{\alpha\pi}} 1\,dx = \sqrt{\alpha\pi} - \sqrt{[\alpha]\pi}$$

$$= \frac{\alpha\pi - [\alpha]\pi}{\sqrt{\alpha\pi}+\sqrt{[\alpha]\pi}} \leq \frac{\pi}{\sqrt{\alpha\pi}+\sqrt{[\alpha]\pi}} \xrightarrow{\alpha\to\infty} 0$$

(ii) Wir substituieren $t = x^2$. Mit $dt = 2x\,dx$ erhalten wir

$$\int_0^\beta 2x\sin(x^4)\,dx = \int_0^{\beta^2} \sin(t^2)\,dt\,.$$

Gemäß (i) konvergiert dieser Term für $\beta \to \infty$.

Aufgabe 55

Berechnen wir zunächst das Integral $I_0(\beta)$:

$$I_0(\beta) = \int_0^\beta e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^\beta = -e^{-\beta} + e^{-0} = 1 - e^{-\beta}.$$

Nun sei $n \geqslant 1$ beliebig. Partielle Integration mit $f'(x) = e^{-x}$ und $g(x) = x^n$ liefert

$$I_n(\beta) = \int_0^\beta x^n e^{-x}\,dx = \left[x^n(-e^{-x})\right]_0^\beta - \int_0^\beta nx^{n-1}(-e^{-x})\,dx = -\beta^n e^{-\beta} + nI_{n-1}(\beta)\,.$$

Mit dieser Rekursionsformel berechnen wir einige weitere Integrale:

$$\begin{aligned}
I_1(\beta) &= -\beta e^{-\beta} + I_0(\beta)\,,\\
I_2(\beta) &= -\beta^2 e^{-\beta} + 2I_1(\beta) = -e^{-\beta}(\beta^2 + 2\beta) + 2I_0(\beta)\,,\\
I_3(\beta) &= -\beta^3 e^{-\beta} + 3I_2(\beta) = -e^{-\beta}(\beta^3 + 3\beta^2 + 6\beta) + 6I_0(\beta)\,.
\end{aligned}$$

Wir vermuten, dass die allgemeine Formel

$$\begin{aligned}
I_n(\beta) &= -e^{-\beta}(\beta^n + n\beta^{n-1} + n(n-1)\beta^{n-2} + \cdots + n(n-1)\cdots 2\,\beta) + n!\,I_0(\beta)\\
&= -e^{-\beta}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-k)!}\,\beta^{n-k} + n!\,I_0(\beta)
\end{aligned}$$

lautet, und zeigen dies mit vollständiger Induktion: Für $n = 0$ ist die Formel richtig; ist sie für ein $n \geqslant 0$ bewiesen, so folgt mit der Rekursionsformel

$$\begin{aligned}
I_{n+1}(\beta) &= -\beta^{n+1}e^{-\beta} + (n+1)\left(-e^{-\beta}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n!}{(n-k)!}\,\beta^{n-k} + n!\,I_0(\beta)\right)\\
&= -e^{-\beta}\left(\beta^{n+1} + (n+1)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n!}{(n-k)!}\,\beta^{n-k}\right) + (n+1)!\,I_0(\beta)\\
&= -e^{-\beta}\left(\beta^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(n+1)!}{(n-(k-1))!}\,\beta^{n-(k-1)}\right) + (n+1)!\,I_0(\beta)\\
&= -e^{-\beta}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!}\,\beta^{n+1-k}\right) + (n+1)!\,I_0(\beta)\,.
\end{aligned}$$

Damit ist die behauptete Darstellung bewiesen, und es ergibt sich

$$I_n(\beta) = -e^{-\beta}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n!}{(n-k)!}\,\beta^{n-k} + n!\,(1 - e^{-\beta}) \xrightarrow{\beta\to\infty} n! \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Aufgabe 56

(a) Für beliebiges $R > 2$ erhalten wir mittels der Substitution $t = \ln x$, $dt = x^{-1}\,dx$

$$\int_2^R \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \int_{\ln 2}^{\ln R} \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}\Big|_{t=\ln 2}^{\ln R} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln R}.$$

Für $R \to \infty$ strebt dies gegen $(\ln 2)^{-1}$; das uneigentliche Integral konvergiert also und hat diesen Wert.

(b) Dieses Integral ist divergent (am linken Rand), denn wegen

$$\sinh y - y = (y + \tfrac{1}{3!}y^3 + \cdots) - y = \tfrac{1}{3!}y^3 + o(y^3) = \tfrac{1}{3!}y^3(1 + o(1)), \quad y \to 0,$$

gilt für hinreichend kleine $y > 0$ sicherlich $|\sinh y - y| \leq y^3$. Wählt man zusätzlich y so klein, dass $|\ln y| \geq 1$ gilt, so ist

$$\left|\frac{y \ln y}{\sinh y - y}\right| \geq \frac{y|\ln y|}{y^3} = \frac{|\ln y|}{y^2} \geq \frac{1}{y^2}.$$

Mit dem Minorantenkriterium folgt die Divergenz, denn $\int_0^1 y^{-2}\,dy$ existiert nicht.

(c) Mit Produktintegration erhalten wir

$$\int_0^R e^{sx}\cos(tx)\,dx = \frac{e^{sx}}{s}\cdot\cos(tx)\Big|_{x=0}^R + \int_0^R \frac{e^{sx}}{s}\cdot t\sin(tx)\,dx.$$

Erneute Produktintegration liefert für das letzte Integral

$$\int_0^R \frac{e^{sx}}{s}\cdot t\sin(tx)\,dx = \frac{e^{sx}}{s^2}\cdot t\sin(tx)\Big|_{x=0}^R - \int_0^R \frac{e^{sx}}{s^2}\cdot t^2\cos(tx)\,dx.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\left(1 + \frac{t^2}{s^2}\right)\int_0^R e^{sx}\cos(tx)\,dx = \frac{e^{sx}}{s}\cos(tx)\Big|_{x=0}^R + \frac{e^{sx}}{s^2}t\sin(tx)\Big|_{x=0}^R$$
$$= \frac{e^{sR}}{s}\cos(tR) - \frac{1}{s} + \frac{e^{sR}}{s^2}t\sin(tR) - 0 \xrightarrow{R\to\infty} -\frac{1}{s}.$$

(Man beachte $s < 0$.) Also ist das Integral konvergent, und es gilt

$$\int_0^\infty e^{sx}\cos(tx)\,dx = -\frac{1}{s}\left(1 + \frac{t^2}{s^2}\right)^{-1} = -\frac{s}{s^2 + t^2}.$$

(d) Es gilt: $\dfrac{\log x}{2x-1} \geq \dfrac{\log x}{2x} > 0$ für $x \geq 1$.

Ferner gilt: $\displaystyle\int_1^R \frac{\log x}{2x}\,dx = \frac{1}{4}\left[(\log x)^2\right]_1^R = \frac{1}{4}\log^2 R \xrightarrow[R\to\infty]{} +\infty$

Nach Minorantenkriterium ist also

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{2x-1}\,dx$ divergent.