Lösungen zum 2. ÜB

Aufgabe 5

(a) Wir bemerken zunächst, dass die Ungleichung $x \leqslant 4 + \sqrt{x-2}$ nur für $x \geqslant 2$ sinnvoll ist. Es gilt

$$x \leqslant 4 + \sqrt{x-2} \quad \Leftrightarrow \quad x - 4 \leqslant \sqrt{x-2}.$$

Im Fall $x \geqslant 4$ ist dies [redacted] äquivalent zu (man beachte $x - 4 \geqslant 0$)

$$\begin{aligned}
(x-4)^2 \leqslant x-2 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - 8x + 16 \leqslant x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 9x + 18 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3)(x-6) \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \big(x - 3 \leqslant 0 \text{ und } x - 6 \geqslant 0\big) \text{ oder } \big(x - 3 \geqslant 0 \text{ und } x - 6 \leqslant 0\big) \\
&\Leftrightarrow \quad \big(x - 3 \geqslant 0 \text{ und } x - 6 \leqslant 0\big) \quad \Leftrightarrow \quad x \in [3, 6].
\end{aligned}$$

Da wir nur $x \geqslant 4$ betrachtet haben, gilt $x \leqslant 4 + \sqrt{x-2}$ in diesem Fall genau für $x \in [4, 6]$.

Für jedes $x \in [2, 4)$ gilt $x - 4 < 0$ und, da die Wurzel nach Definition nichtnegativ ist, genügt jedes $x \in [2, 4)$ der Ungleichung $x - 4 < 0 \leqslant \sqrt{x-2}$ und somit auch $x \leqslant 4 + \sqrt{x-2}$.

Insgesamt haben wir

$$x \leqslant 4 + \sqrt{x-2} \quad \Leftrightarrow \quad x \in [2, 6].$$

(b) Nun seien $x, y \in (0, \infty)$.

Es gilt:

beide Seiten positiv!

$$\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad \Leftrightarrow \quad x + y \leqslant x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant 2\sqrt{x}\sqrt{y}.$$

Die letzte Ungleichung ist offenkundig wahr.

Nun zur zweiten Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant \frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} \quad &\overset{|\cdot\sqrt{x}\sqrt{y}>0}{\Leftrightarrow} \quad x\sqrt{y} + \sqrt{x}y \leqslant x\sqrt{x} + y\sqrt{y} \\
&\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant x\sqrt{x} - x\sqrt{y} + y\sqrt{y} - y\sqrt{x} \\
&\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant (x-y)(\sqrt{x} - \sqrt{y}).
\end{aligned}$$

Die letzte Aussage ist wahr, denn:

1. Fall: $x = y$. $0 \leqslant 0$ ist wahr.

2. Fall: $x < y$. Wegen $x < y \Leftrightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y}$ ist $0 \leqslant (x-y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})$ wahr.

3. Fall: $x > y$. Wegen $x > y \Leftrightarrow \sqrt{x} > \sqrt{y}$ folgt auch hier $0 \leqslant (x-y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})$.

(c)

i) Es ist

$$\sum_{j=0}^{4} \binom{4}{j} (-1)^j 3^{j+1} = 3 \sum_{j=0}^{4} \binom{4}{j} (-3)^j 1^{4-j} = 3(-3+1)^4 = 3 \cdot 16 = 48.$$

ii) Sei $n \in \mathbb{N}$. Nach Definition der Binomialkoeffizienten gilt für jedes $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$k\binom{n}{k} = k \cdot \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,((n-1)-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Daher liefert der binomische Lehrsatz

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} \overset{j:=k-1}{=} n\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \cdot 1^j \cdot 1^{(n-1)-j} = n \cdot (1+1)^{n-1} = n \cdot 2^{n-1}.$$

iii) Mit der gleichen Umformung wie in **ii)** erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k n \binom{n-1}{k-1} = -n \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1} \\
&\overset{j:=k-1}{=} -n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \cdot (-1)^j \cdot 1^{(n-1)-j} \\
&= -n(1-1)^{n-1} = -n \cdot 0^{n-1} = \begin{cases} -1 & \text{für } n = 1, \\ 0 & \text{für } n > 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6

(c) IA: Für $n = 5$ gilt $2^n = 2^5 = 32$ und $n^2 = 5^2 = 25$. Also ist die behauptete Ungleichung für $n = 5$ wahr.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 5$ beliebig. Für dieses n gelte $2^n > n^2$ (IV). Dann folgt

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \overset{\mathrm{IV}}{>} 2 \cdot n^2.$$

Zu zeigen verbleibt: $2n^2 \geqslant (n+1)^2 \Leftrightarrow 2n^2 \geqslant n^2 + 2n + 1 \Leftrightarrow n^2 \geqslant 2n + 1$. Die Gültigkeit der letzten Ungleichung sehen wir folgendermaßen

$$n \geqslant 5 \Rightarrow n \geqslant 3 \Rightarrow n^2 \geqslant 3n \Rightarrow n^2 \geqslant 2n + n \Rightarrow n^2 \geqslant 2n + 1 .$$

(a) I.A.: $n = 1$: $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 1(1+1) = 2$

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3} = \frac{1(1+1)(1+2)}{3} = 2 \quad ✓$$

I.S: $\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) + (n+1)(n+2)$

$$\underset{\text{I.V.}}{=} \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2)$$

$$= \frac{1}{3}(n+1)(n+2)[n+3] = \frac{1}{3}(n+1)((n+1)+1)((n+1)+2) \quad ✓$$

(b) I.A.: $n=0$: $\sum_{k=0}^{n} q^k = q^0 = 1$; $\frac{q^1-1}{q-1} \underset{q \neq 1}{=} 1$ ✓

I.S.: $\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} \underset{\text{I.V.}}{=} \frac{q^{n+1}-1}{q-1} + q^{n+1}$

$$= \frac{q^{n+1} - 1 + q^{n+2} - q^{n+1}}{(q-1)} = \frac{q^{n+2}-1}{q-1}. \quad ✓$$

(d) I.A.: $n = 1$: $2^{2+3} + 2 \cdot 5^{2-1} = 2^5 + 2 \cdot 5 = 32 + 10 = 42$ ✓

I.V.: $\exists k \in \mathbb{Z}$: $2^{2n+3} + 2 \cdot 5^{2n-1} = k \cdot 42$

I.S: $2^{2(n+1)+3} + 2 \cdot 5^{2(n+1)-1} = 2^{2n+3+2} + 2 \cdot 5^{2n-1+2}$

$= 2^{2n+3+2} + 2 \cdot 5^{2n-1+2} + 4 \cdot 2 \cdot 5^{2n-1} - 4 \cdot 2 \cdot 5^{2n-1}$

$= 4(2^{2n+3} + 2 \cdot 5^{2n-1}) + 2 \cdot 5^{2n-1+2} - 8 \cdot 5^{2n-1}$

$= 4 \cdot k \cdot 42 + (50-8) 5^{2n-1} = (4k + 5^{2n-1}) \cdot 42$ ✓

Aufgabe 7

(a) Beweis durch vollständige Induktion:
IA: Wegen $\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ und $\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{1+k} = \frac{1}{2}$ ist $\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ für $n=1$ richtig.
IS: Sei $n \in \mathbb{N}$. Für dieses n gelte $\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ (IV). Dann folgt

$$\sum_{k=1}^{2(n+1)}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \overset{\text{IV}}{=} \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} + \frac{1}{n+(n+1)} - \frac{1}{2n+2}$$
$$= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+k} - \frac{1}{2n+2} \overset{j:=k-1}{=} \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{n+(1+j)} - \frac{1}{2n+2}$$
$$= \frac{1}{n+1} + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(n+1)+j} - \frac{1}{2n+2} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(n+1)+j} + \frac{2-1}{2n+2} = \sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{(n+1)+j}.$$

(b) Wir verwenden wieder vollständige Induktion.
IA: Für $n=1$ hat die Summe genau einen Summanden und ergibt 1; dies ist größer als $\frac{1}{2}$.
IS: Sei $n \in \mathbb{N}$. Für dieses n sei $\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{k} > \frac{n}{2}$ erfüllt (IV). Dann folgt

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{k} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{k} \overset{\text{IV}}{>} \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{n}{2} + \frac{2^{n+1}-1-2^n+1}{2^{n+1}} = \frac{n+1}{2}.$$

(Bei der Abschätzung wurde außer IV noch benutzt, dass $2^{n+1} > k$, also $1/k > 1/2^{n+1}$, für alle $k \in \{2^n, \dots, 2^{n+1}-1\}$ gilt.)

(c) I.A $n=1$: $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{2} \leq 2 - \frac{1}{2}$ ✓

I.S. $n \to n+1$: $\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \underset{\text{I.V.}}{\leq} 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$

$= 2 + \frac{-(n+1)^2 + n}{n(n+1)^2} = 2 - \frac{n^2+n+1}{(n+1)^2 \cdot n}$ (*)

Es gilt: $\frac{n^2+n+1}{(n+1)^2 n} \geq \frac{1}{n+1} \iff \frac{n^2+n+1}{(n+1)n} \geq 1 \iff n^2+n+1 \geq (n+1)n$

$\iff n^2+n+1 \geq n^2+n \iff 1 \geq 0$

Also ist (*) wahr.

(d) I.A.: $\begin{cases} a_0 = 1 \leq (7/5)^1 = \frac{7}{5} ✓ \\ a_1 = 1 \leq \left(\frac{7}{5}\right)^1 = \frac{7}{5} ✓ \end{cases}$

I.S $n-1, n \to n+1$ $(n \geq 2)$: $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2} \underset{\text{I.V.}}{\leq} \frac{1}{2}\left[\left(\frac{7}{5}\right)^n + \left(\frac{7}{5}\right)^{n-1}\right]$

$= \left(\frac{7}{5}\right)^{n+1} \underbrace{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{7}{5}\right)^{-1} + \left(\frac{7}{5}\right)^{-2}\right]} \leq \left(\frac{7}{5}\right)^{n+1}$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{5}{7} + \frac{5^2}{7^2}\right] = \frac{1}{2}\,\frac{5\cdot 7 + 5\cdot 5}{7^2} \leq \frac{2\cdot 35}{2\cdot 49} = \frac{35}{49} < 1$

Aufgabe 8

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konv. gg. 0, falls zu jedem $\tilde{\varepsilon}>0$ ein $n_0\in\mathbb{N}$ ex. so daß für alle $n\geq n_0$ gilt: $|a_n|<\tilde{\varepsilon}$.

(a) Die Bedingung ist hinreichend dafür, daß (a_n) Nullfolge ist. Denn sei $\tilde{\varepsilon}>0$ vorgegeben. Setze $\varepsilon:=\sqrt{\tilde{\varepsilon}}$. Nach Vor. ex. ein $n_0\in\mathbb{N}$ so daß $|a_n|\leq\varepsilon^2$ für alle $n\geq n_0$. Damit gilt ab diesem n_0: $|a_n|<\tilde{\varepsilon}$.

(b) (a_n) muß nicht Nullfolge sein.

Gegenbsp: $a_n=-1$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

Dann gilt zwar $|a_n^2+a_n|=|(-1)^2-1|=0<\varepsilon$ für jedes $\varepsilon>0$ und alle $n\in\mathbb{N}$, aber $a_n \not\to 0$ $(n\to\infty)$.

(c) (a_n) muß nicht NF sein. Gegenbsp.:

$$a_n=\begin{cases}0 & \text{falls } n \text{ gerade}\\ 1 & \text{falls } n \text{ ungerade.}\end{cases}$$

Dann gilt zwar $|a_n\cdot a_{n+1}|=0<\varepsilon$ für jedes $\varepsilon>0$ und jedes $n\in\mathbb{N}$, aber $a_n\not\to 0$ $(n\to\infty)$.

(d) (a_n) ist Nullfolge: Sei $\tilde{\varepsilon}>0$ vorgegeben. Sei $\varepsilon:=\tilde{\varepsilon}^2$. Dann gilt $|a_n\cdot a_m|<\varepsilon$ für alle $n\geq n_0$ und alle $m\in\mathbb{N}$, insbesondere $|a_n|^2<\varepsilon$ für alle $n\geq n_0$. Somit $|a_n|<\tilde{\varepsilon}$ für $n\geq n_0$.