Lösungen zum 3. ÜB

Aufgabe 9

(a) Diese Folge ist konvergent, denn es gilt

$$\frac{n^2+3n-4}{1+n^2+4n^3} = \frac{1/n+3/n^2-4/n^3}{1/n^3+1/n+4} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{0+0-0}{0+0+4} = 0.$$

(b) Wende Binom-Trick an:

$$\sqrt{9n^2+2n+1} - 3n = \frac{\left(\sqrt{9n^2+2n+1}-3n\right)\left(\sqrt{9n^2+2n+1}+3n\right)}{\sqrt{9n^2+2n+1}+3n}$$

$$= \frac{9n^2+2n+1-9n^2}{\sqrt{9n^2+2n+1}+3n} = \frac{2n+1}{\sqrt{9n^2+2n+1}+3n}$$

$$= \frac{2+1/n}{\sqrt{9+2/n+1/n^2}+3} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{3}$$

(c) Der binomische Satz [redacted] liefert für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$(1+n)^{42} = \sum_{k=0}^{42} \binom{42}{k} n^k = \alpha_0 + \alpha_1 n + \ldots + \alpha_{42} n^{42}, \quad \text{wobei} \quad \alpha_k := \binom{42}{k}.$$

Wegen $\alpha_{42} = \binom{42}{42} = 1$ ergibt sich $(1+n)^{42} - n^{42} = \alpha_0 + \alpha_1 n + \ldots + \alpha_{41} n^{41}$. Folglich ist

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\alpha_0 + \alpha_1 n + \ldots + \alpha_{40} n^{40} + \alpha_{41} n^{41}}{n^{41}} \\ &= \frac{\alpha_0}{n^{41}} + \frac{\alpha_1}{n^{40}} + \ldots + \frac{\alpha_{40}}{n} + \alpha_{41} \xrightarrow{n\to\infty} \alpha_{41} = \binom{42}{41} = \binom{42}{1} = 42. \end{aligned}$$

(d) Wir verwenden die geometrische Summenformel[redacted]

$$q^m - 1 = (q-1)\cdot \sum_{k=0}^{m-1} q^k = (q-1)\left(1+q+q^2+\ldots+q^{m-1}\right) \quad (*)$$

für $m = 10$. Setzen wir $b_n := \sqrt[10]{1+3n^{-4}+n^{-9}}$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = n^4(b_n - 1) \overset{(*)}{=} n^4 \cdot \frac{b_n^{10}-1}{b_n^9+b_n^8+\ldots+b_n+1} = \frac{n^4(3n^{-4}+n^{-9})}{b_n^9+b_n^8+\ldots+b_n+1} = \frac{3+n^{-5}}{b_n^9+b_n^8+\ldots+b_n+1}.$$

Wegen $b_n \to 1$ folgt $a_n \to \frac{3}{10}$ $(n \to \infty)$.

Aufgabe 10

(a) (1) 1. (a_n) ist beschränkt. Wir zeigen $1 \leq a_n \leq 2$ mit Induktion:

I.A.: $n=1$: $1 \leq a_1 = \frac{3}{2} \leq 2$ ✓

I.S.:

$$1 \leq a_n \leq 2 \Rightarrow -1 \geq -a_n \geq -2$$

$$\Rightarrow 3 \geq 4-a_n \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{4-a_n} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{3}{4-a_n} = a_{n+1} \leq \frac{3}{2} \leq 2.$$ ✓

2. (a_n) ist monoton fallend:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3}{4-a_n} - a_n = \frac{3-a_n(4-a_n)}{4-a_n}$$

$$= \frac{3-4a_n+a_n^2}{4-a_n} = \frac{(a_n-3)(a_n-1)}{4-a_n}$$

$$\leq 0, \text{ da } \left.\begin{cases} (4-a_n) \geq 0 \\ (a_n-1) \geq 0 \\ (a_n-3) \leq 0 \end{cases}\right\} \text{ wegen } a_n \in [1,2]$$

3. Aus Monotonie und Beschränktheit folgt Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Sei $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$ und

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{3}{4-\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \frac{3}{4-a}$$

$$\Rightarrow a(4-a) = 3 \Rightarrow -a^2+4a-3 = 0$$

$$\Rightarrow (a-3)(a-1) = 0 \Rightarrow a=3 \text{ oder } a=1$$

wegen $1 \leq a_n \leq 2$ folgt $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Aufgabe 10

(a) (2) $\left.\begin{array}{l} a_1 = 5 \overset{!}{=} \alpha + \beta \cdot \frac{1}{2} \\ a_2 = 4 \overset{!}{=} \alpha + \beta \cdot \frac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow 5-4 \overset{!}{=} \beta \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow \beta = 4$

$\Rightarrow 5 = \alpha + 2 \Rightarrow \alpha = 3$

Beh: $a_n = 3 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (n \geq 1)$.

Bew: I.A: $\left\{\begin{array}{l} n = 1 \\ n = 2 \end{array}\right.$ ✓ klar.

I.S.: $n, n+1 \to n+2$ für alle $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \frac{3}{2} a_{n+1} - \frac{1}{2} a_n \\ &\underset{\text{I.V.}}{=} \frac{3}{2} \cdot \left(3 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - \frac{1}{2}\left(3 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \\ &= \frac{3}{2} \cdot 3 + \frac{3}{2} \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{3}{2} \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - \frac{3}{2} - 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \\ &= 3 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \checkmark \end{aligned}$$

Anhand der Formel sieht man

$$a_n = 3 + \underbrace{4\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 3.$$

[Man hätte auch Konvergenz von (a_n) aus Monotonie und Beschränktheit zeigen können, jedoch bliebe der Grenzwert unbekannt, denn die Relation $a = \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}a$ liefert keine Information.]

Aufgabe 10

(b) (1) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1)_{n\in\mathbb{N}}$.
Dann ist (a_n) beschränkt und (b_n) konvergent. Jedoch konvergiert die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n = (-1)^n$ nicht.

(2) Nun seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Behauptet wird, dass die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n$ gegen 0 konvergiert.

Da (a_n) beschränkt ist, existiert eine Konstante $K > 0$ so, dass $|a_n| \leqslant K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Deshalb ergibt sich für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$|c_n| = |a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leqslant K|b_n|.$$

Wegen $b_n \to 0$ konvergiert nach 2.2.(3)(i) $|b_n| \to 0$ und nach 2.2.(3)(iii) auch $K|b_n| \to 0$ für $n \to \infty$.
Mit 2.2.(3)(iv) folgt $c_n \to 0$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 11

(a) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$, also gilt:

$$\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \geq m: |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (1)$$

Für ein solches festes m gilt

$$\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{m} a_k}_{\text{konstant}} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Also $\exists n_0 \in \{m+1, m+2, \dots\}\ \forall n \geq n_0$:

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} a_k\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (2).$$

Für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} a_k\right| + \frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{n} |a_k|$$

$$\overset{(1),(2)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n}{n}\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ war beliebig, also $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \to 0$ $(n \to \infty)$. $\square$

(b) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \Rightarrow a_n - a \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \underset{(a)}{\Longrightarrow} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k - a)$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - \frac{n}{n} a \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \xrightarrow[n\to\infty]{} a.$$

(c) $a_n = (-1)^n$ liefert das gewünschte, denn $\sum_{k=1}^{n} a_k = \begin{cases} -1, & n \text{ ungerade} \\ 0, & n \text{ gerade} \end{cases}$

Aufgabe 12

a) Wegen $a_n = \frac{2n}{n+1} = \frac{2}{1+\frac{1}{n}}$ konvergiert (a_n) für $n \to \infty$ gegen 2.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$|a_n - 2| = \left|\frac{2n - 2(n+1)}{n+1}\right| = \frac{2}{n+1}.$$

Daher ergibt sich

$$|a_n - 2| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{n+1} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{2}{\varepsilon} - 1.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{2}{\varepsilon} - 1$. Wie eben gesehen, gilt dann $|a_n - 2| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant n_0$. Also konvergiert (a_n) gegen 2.

Ist $\varepsilon = 10^{-10}$, so kann man beispielsweise $n_0 = 2 \cdot 10^{10} > 2 \cdot 10^{10} - 1$ nehmen. Damit gilt $|a_n - 2| < 10^{-10}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2 \cdot 10^{10}$.

b) Die Folge (a_n) ist eine Nullfolge: Es gilt $|a_n| \leqslant 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $\varepsilon \in (0,1)$ ist

$$|a_n| = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{n+1}+1}} < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{\sqrt{n+1}+1} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \sqrt{n+1} > \frac{1}{\varepsilon^2} - 1 \Leftrightarrow n > \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 1\right)^2 - 1.$$

Hieraus folgt: Wählt man zu einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > (\frac{1}{\varepsilon^2} - 1)^2 - 1$, dann gilt $|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant n_0$, d.h. (a_n) konvergiert gegen 0.

Etwa für $n_0 = 10^{40}$ ist $|a_n - 0| < 10^{-10}$ für alle $n \geqslant 10^{40}$ erfüllt.