# Lösungen zum 4. ÜB

## Aufgabe 13 (a)

(i) Verwende geometrische Summenformel

"$\sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} - 1$ für $q \neq 1$" mit $q = -\frac{3}{4}$:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{3}{4}\right)^k = \frac{\left(-\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1}{-\frac{3}{4} - 1} - 1 .$$

Da $\left(-\frac{3}{4}\right)^{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, gilt: $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{-1}{-\frac{7}{4}} - 1 = -\frac{3}{7}$

(ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right)$$

$$\underset{\text{Teleskop-summe}}{=} \frac{1}{1!} - \frac{1}{(n+1)!} .$$

d.h. $s_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

(iii) Nach dem Binomischen Satz gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n .$$

Mit der geometrischen Summenformel folgt:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \left(\frac{1}{2}\right)^{l+k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1}{\frac{3}{4} - 1} - 1$$

und $\lim_{n\to\infty} s_n = 4 - 1 = 3 .$

(iv) Es gilt: $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ (2)

(Binomi-Trick). Damit gilt:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k+1}-\sqrt{k} \underset{\substack{\text{Teleskop-}\\ \text{summe}}}{=} \sqrt{n+1}-1.$$

Also divergiert $(s_n)$, denn $s_n = \sqrt{n+1}-1 \xrightarrow{n\to\infty} \infty$.

## Aufgabe 13 (b)

Da $a_k > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, folgt $s_{n+1} \geq s_n$.
Also ist $(s_n)$ monoton wachsend.
Aus der Vorlesung ist bekannt: aufgrund der Monotonie von $(s_n)$ gilt:

(∗) $(s_n)$ konvergent $\Longleftrightarrow$ $(s_n)$ beschränkt.

Es sei nun $(s_n)$ konvergent $\Rightarrow$ (i) trifft zu.
Ist $(s_n)$ nicht konvergent $\overset{}{\underset{(*)}{\Rightarrow}}$ $(s_n)$ ist unbeschränkt, d.h. $\forall c \in \mathbb{N}\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : s_{n_0} > c$. Da $(s_n)$ monoton wachsend ist, gilt $s_n \geq s_{n_0} > c$ für $n \geq n_0$.
$\Rightarrow \forall c \in \mathbb{N}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : s_n > c \Rightarrow$ (ii) trifft zu.

## Aufgabe 14

(a) $$a_{2k} = \frac{2(2k)+1}{3(2k)+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{2}{3}$$

$$a_{2k-1} = -\frac{2(2k-1)+1}{3(2k-1)+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} -\frac{2}{3}$$

Da jedes Folgenglied von $(a_n)$ in einer der Teilfolgen $(a_{2k})$, $(a_{2k-1})$ vorkommt, gilt nach Satz aus der Übung $H(a_n) = \{\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\}$

(b) $a_{4k} = (1+(-1)^{4k})\cdot(-1)^{4k(4k+1)/2} = 2\cdot(-1)^{2k(4k+1)} = 2$ ③

$a_{4k+1} = (1+(-1)^{4k+1})\cdot(-1)^{(4k+1)(4k+2)/2} = 0$

$a_{4k+2} = (1+(-1)^{4k+2})\cdot(-1)^{(4k+2)(4k+3)/2} = 2\cdot(-1)^{(2k+1)(4k+3)}$

$= 2\cdot(-1) = -2$

$a_{4k+3} = (1+(-1)^{4k+3})(-1)^{(4k+3)(4k+4)/2} = 0$

Da fast jedes Folgenglied von $(a_n)$ in einer der Teilfolgen $(a_{4k+i})$, $i=0,1,2,3$ vorkommt, gilt $H(a_n) = \{0, 2, -2\}$.

(c) $a_{2k} = \left(1+\frac{1}{4k}\right)^{6k} = \left[\left(1+\frac{1}{4k}\right)^{4k}\right]^{6/4} \xrightarrow[k\to\infty]{} e^{\frac{6}{4}}$

$a_{2k-1} = \left(1-\frac{1}{4k-2}\right)^{3(2k-1)} = \left[\left(1-\frac{1}{4k-2}\right)^{4k-2}\right]^{\frac{3}{2}} \xrightarrow[k\to\infty]{} e^{-\frac{3}{2}}$

Da jedes Folgenglied von $(a_n)$ in einer der Teilfolgen $(a_{2k})$, $(a_{2k-1})$ vorkommt, gilt $H(a_n) = \{e^{\frac{3}{2}}, e^{-\frac{3}{2}}\}$.

(d) $a_{3k} = 1-2^{-3k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$

$a_{3k-1} = 2+\frac{3k-1+1}{3k-1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 2+1 = 3$

$a_{3k-2} = \left(1+\frac{1}{3k-2}\right)^{-2(3k-2)} \xrightarrow[k\to\infty]{} e^{-2}$

Da jedes Folgeglied von $(a_n)$ in einer der Teilfolgen $(a_{3k})$, $(a_{3k-1})$, $(a_{3k-2})$ vorkommt, folgt $H(a_n) = \{1, 3, e^{-2}\}$.

# Aufgabe 15

(a) Beh.: $\lim_{n\to\infty} a_n = \max\{a,b\}$

Bew: oBdA $a \geq b$.

$$a \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq \sqrt[n]{a^n + a^n} = 2^{\frac{1}{n}} \cdot a$$

$$\underset{n\to\infty}{\downarrow} a \qquad\qquad \underset{n\to\infty}{\downarrow} a$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = a.$$

(b) Bemerkung: $(a_n)$ konv, $\underbrace{n(j)}_{\in \mathbb{N}} \xrightarrow{j\to\infty} \infty$

$$\Rightarrow \lim_{j\to\infty} a_{n(j)} = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

$$\left(1+\frac{1}{nk}\right)^n = \sqrt[k]{\left(1+\frac{1}{nk}\right)^{nk}} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt[k]{e}$$

(c) $$\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^n = \underbrace{\underbrace{\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^{n+k}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} e} \underbrace{\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^{-k}}_{\xrightarrow[\substack{k \text{ fest} \\ n\to\infty}]{} 1}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} e}$$

(d) $$\left(1-\frac{1}{nk}\right)^n = \sqrt[k]{\left(1-\frac{1}{nk}\right)^{nk}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt[k]{\frac{1}{e}}$$

# Aufgabe 16



(a)

(i) $(b_n) = (1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, \ldots)$

(ii) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = (-1)^n n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(iii) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n =$ [redacted]$8 + \frac{(-1)^n}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(iv) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $e_n = 0$ für gerade $n$ und $e_n = n$ für ungerade $n$.

(b)

(i) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitze eine divergente Teilfolge $(a_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Zu zeigen ist, dass dann auch $(a_n)$ divergent ist.

Wir führen einen Beweis durch Widerspruch. Annahme: $(a_n)$ konvergiert.
Dann konvergiert jede Teilfolge von $(a_n)$. Dies ist jedoch nicht möglich, weil vorausgesetzt wurde, dass $(a_n)$ eine divergente Teilfolge besitzt. Also ist die Annahme falsch, d.h. die Folge $(a_n)$ divergiert.

(ii) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Im allgemeinen folgt aus der Konvergenz von $(a_{2n})$ und $(a_{2n+1})$ nicht die Konveregnz von $(a_n)$.

Ist etwa die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $a_n = (-1)^n$. Dann konvergieren die beiden Teilfolgen $(a_{2n})$ und $(a_{2n+1})$ für $n \to \infty$. Jedoch ist $(a_n)$ divergent.

(iii) Sei $(a_n)$ eine Folge. Behauptung:

$$(a_n) \text{ konvergiert} \quad \Longleftrightarrow \quad (a_{2n}),\ (a_{2n+1}) \text{ und } (a_{3n}) \text{ konvergieren.}$$

"$\Rightarrow$": Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere. Dann konvergiert dann auch jede Teilfolge von $(a_n)$. Insbesondere sind die drei Teilfolgen $(a_{2n})$, $(a_{2n+1})$ und $(a_{3n})$ konvergent.

"$\Leftarrow$": Nun ist die Konvergenz der drei Teilfolgen $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ vorausgesetzt. Zu zeigen: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Wir setzen $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} =: a$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} =: b$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{3n} =: c$ und wollen zuerst $a = b = c$ zeigen.
Da $(a_{6n})$ Teilfolge von $(a_{2n})$ ist und $(a_{2n})$ konvergiert, konvergiert $(a_{6n})$ gegen $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = a$.
Da $(a_{6n})$ Teilfolge von $(a_{3n})$ ist und $(a_{3n})$ konvergiert, konvergiert $(a_{6n})$ gegen $\lim\limits_{n\to\infty} a_{3n} = c$.

Hieraus folgt aufgrund der Eindeutigkeit des Grenzwerts $a = c$.

Durch Betrachtung von $(a_{6n+3})$ ergibt sich analog $b = c$.

Wir wollen nun zeigen, dass $(a_n)$ gegen $a$ konvergiert. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Wegen $a_{2n} \to a$ für $n \to \infty$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_{2n} - a| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geqslant n_0,$$

woraus

$$|a_m - a| < \varepsilon \qquad \text{für alle geraden } m \geqslant 2n_0$$

folgt. Wegen $a_{2n+1} \to b = a$ gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_{2n+1} - a| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geqslant n_1,$$

woraus

$$|a_m - a| < \varepsilon \qquad \text{für alle ungeraden } m \geqslant 2n_1 + 1$$

folgt. Demnach gilt für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geqslant \max\{2n_0, 2n_1 + 1\}$

$$|a_m - a| < \varepsilon,$$

d.h. $(a_n)$ konvergiert und zwar gegen $a$.