

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

10. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 15.01.2016, 12.30 Uhr

Aufgabe 1:

- (a) Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$, und die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ sei Lipschitz-stetig. Zeigen Sie, dass f dann gleichmäßig stetig ist.
- (b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ gleichmäßig stetig ist.
- (c) Sei $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass f genau dann gleichmäßig stetig ist, wenn $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ existiert.

Aufgabe 2 (K):

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ auf gleichmäßige Stetigkeit.

- (a) $D = [0, \infty)$, $f(x) := \sqrt[3]{x}$ (b) $D = (0, \infty)$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$
- (c) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ (d) $D = (0, \infty)$, $f(x) = \log(x)$

Aufgabe 3 (K):

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ auf Monotonie und Invertierbarkeit. Geben Sie im Fall der Invertierbarkeit die Umkehrfunktion an und untersuchen Sie diese auf Stetigkeit

- (a) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ (b) $D = [1, 2] \cup [3, 4]$, $f(x) = x^2 - 6x + 5$
- (c) $D = [-1, 10]$, $f(x) = e^{2x} + 4e^x - 3$ (d) $D = [0, 2]$, $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 3 - x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$
- (e) $D = [0, 2)$, $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 3 - x & 1 \leq x < 2 \end{cases}$

Aufgabe 4:

- (a) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Beweisen Sie oder widerlegen Sie:
- (i) A abgeschlossen $\Rightarrow f(A)$ abgeschlossen,
- (ii) B abgeschlossen $\Rightarrow f^{-1}(B)$ abgeschlossen,

- (iii) A beschränkt $\Rightarrow f(A)$ beschränkt,
 - (iv) B beschränkt $\Rightarrow f^{-1}(B)$ beschränkt,
 - (v) A kompakt $\Rightarrow f(A)$ kompakt,
 - (vi) B kompakt $\Rightarrow f^{-1}(B)$ kompakt.
- (b) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$. Zeigen Sie: D ist genau dann kompakt, wenn jede stetige Funktion auf D beschränkt ist.