Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Peter Rupp

WS 2015/16
15.01.2016

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

11. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 22.01.2016, 12.30 Uhr

Aufgabe 1:
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $f'(a) < f'(b)$. Zeigen Sie: Für alle $r \in (f'(a), f'(b))$ existiert ein $x \in (a,b)$ derart, dass $f'(x) = r$ gilt.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - rx$ und zeigen Sie:

$$\min_{x\in[a,b]} g(x) < \min\{g(a), g(b)\}.$$

Aufgabe 2 (K):

(a) Seien eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit der Eigenschaft $g(x) \cdot x \to \infty$ $(x \to 0)$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ F(x) := \begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

in 0 differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung in 0.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} |x|^{5/4} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

in 0 differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung in 0.

Aufgabe 3 (K):
Berechnen Sie die Ableitung von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an allen Stellen $x \in \mathbb{R}$. Dabei ist f definiert durch:

(a) $f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(b) $f(x) = \frac{e^{x^3}}{1+x^2}$

(c) $f(x) := (1 + x^2)^x$

(d) $f(x) := \frac{1}{\sin(x)^2+\cos(x)^2}$

(e) $f(x) := \log(1 + x^4)\cos(x)$

(f) $f(x) := (1 + x^2)^{-2}\, x^2$

Aufgabe 4:
Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, in denen die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist und berechnen Sie für diese x die Ableitung $f'(x)$:

$$f(x) := \begin{cases} x^4 - 2x^3 + x^2, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$