Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Peter Rupp

WS 2015/16
22.01.2016

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

12. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 29.01.2016, 12.30 Uhr

Die Anmeldung für den Übungsschein ist ab sofort bis 05.02.2016 möglich.

Aufgabe 1 (K):
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{1-\cos(x)}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0+} x\log(x)$

(c) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\log(x^2+3)}{\log(x)}$

(d) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{(1+x)^p}{1+x^p}$, $(p>0)$

(e) $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin(\cos(x/2))}{x-\pi}$

(f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\log(1+e^{-x})}{\sqrt{1+x^2}}$

(g) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-x+2}$

(h) $\lim\limits_{x\to \infty} \sin(\sqrt{x})-\sin(\sqrt{x+1})$

Aufgabe 2:

(a) Beweisen Sie die Potenzreihendarstellung des Arkustangens:

$$\arctan(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (x\in[-1,1])$$

(b) Zeigen Sie $e\notin\mathbb{Q}$, indem Sie den Satz von Taylor für die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x):=e^x$ verwenden.

Aufgabe 3 (K):

(a) Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen:

(i)

$$xe^{-x}-ye^{-y}\le (x-y)e^{-y} \qquad (x>y>0)$$

(ii)

$$x^2\log(x)-y^2\log(y)\le x(1+2\log(x))(x-y) \qquad (x>y>0)$$

(b) Sei $f \in C^2([0,1])$ mit $f(0) = f(1) = 0$ und $f''(x) = e^{-x} f(x)$ $(x \in [0,1])$. Zeigen Sie, dass dann $f(x) = 0$ $(x \in [0,1])$ gilt.
Hinweis: Nehmen Sie an, dass f nicht konstant ist.

Aufgabe 4:

(a) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, auf (a,b) differenzierbar und es gelte $\lim\limits_{x \to a+} f'(x) = r$ für ein $r \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann $f'(a)$ existiert und $f'(a) = r$ gilt.

(b) Es sei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := x \log(x)$, Zeigen Sie, dass f auf $[e^{-1}, \infty)$ streng monoton wachsend ist und berechnen Sie für die Umkehrfunktion die Ableitungen an den Stellen ne^n, $n \in \mathbb{N}_0$.