Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Peter Rupp

WS 2015/16
29.01.2016

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

13. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 05.02.2016, 12.30 Uhr

Aufgabe 1 (K):

(a) Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$. Finden Sie ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für das N-te Taylor-Polynome P_N in 0, definiert durch $P_N(x) = \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, gilt:

$$|f(x) - P_N(x)| \leq \frac{1}{100} \qquad (x \in [-\pi, \pi])$$

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und f, f'' seien beschränkt. Beweisen Sie, dass dann auch f' beschränkt ist.
Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Taylor.

Aufgabe 2 (K):
Bestimmen Sie den Wert der folgenden Integrale direkt über die Definition mit Ober- und Untersummen.

(a) $\int_0^1 x^3 \, dx$

(b) $\int_1^a \frac{1}{x} \, dx$, wobei $a > 1$

Hinweis zu a): Sie dürfen ohne Beweis $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ $n \in \mathbb{N}$ benutzen.
Hinweis zu b): Verwenden Sie die Zerlegung $Z_n := \{x_0, .., x_n\}$ mit $x_j = a^{\frac{j}{n}}$, $j = 0, .., n$.

Aufgabe 3:
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f \in C([a, b])$.

(a) Beweisen Sie: Gilt $f \geq 0$ und $\int_a^b f(x) \, dx = 0$, so gilt bereits $f = 0$.

(b) Gilt Teil a) auch dann noch, wenn man nur $f \in R([a, b])$ anstelle von $f \in C([a, b])$ fordert? Beweisen Sie Ihre Antwort.

(c) Zeigen Sie: Gilt $\int_a^b f(x)g(x) \, dx = 0$ für alle $g \in C([a, b])$, so gilt bereits $f = 0$.

Aufgabe 4:
Es sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Zeigen Sie:

$$\int_0^1 |f'(x) - f(x)| \, dx \geq \frac{1}{e}.$$

Hinweis: Betrachten Sie $e^x (f(\cdot) e^{-(\cdot)})'(x)$.