Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Peter Rupp

WS 2015/16
05.01.2016

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

14. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 12.02.2016, 12.30 Uhr

Aufgabe 1 (K):
Berechnen Sie folgende Integrale

(a) $\int_0^{\sqrt{2}/2} x \arcsin(x)\, dx$

(b) $\int_0^1 \tanh(x)\, dx$

(c) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\, dx$

(d) $\int_0^1 (x^5 + x^3)e^{-x^2}\, dx$

(e) $\int_0^1 \frac{2x^5-x^4+8x^3+15x^2+20x-8}{x^4+2x^2+8x+5}\, dx$

(f) $\int_2^4 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\, dx$

Aufgabe 2:

(a) Es sei $f:\, [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig und es gelte

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 x f(x)\, dx = 0,\ \int_0^1 x^2 f(x)\, dx = 1$$

Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in (0,1)$ existiert mit $|f(x_0)| \geq 12$.
Hinweis: Berechnen Sie $\int_0^1 (x-1/2)^2 f(x)\, dx$ und benutzen Sie ohne Beweis, dass aus $f \in R([a,b]), f(x) > 0$ $(x \in [a,b])$ folgt: $\int_a^b f(x) > 0$.

(b) Es sei $f:\, [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig und $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = c \ \Rightarrow\ \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t) = c.$$

Gilt auch die Umkehrung?

Aufgabe 3 (K):
Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz:

(a) $\int_2^\infty \frac{\sin(x)}{2x^2+5x-4}\, dx$

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{x}}{\sin(x)}\, dx$

(c) $\int_1^\infty \frac{\log(x)}{2+x^\alpha}\, dx,\ \alpha > 0$

(d) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-\cos(x)}\, dx$

(e) $\int_0^\infty \sin(x^2)$

(f) $\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x}\, dx$

Aufgabe 4:

(a) Es sei $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ gleichmäßig stetig und es existiere das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(x)\,dx$. Zeigen Sie: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

(b) Es sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig, monoton fallend und es existiere das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(x)\,dx$. Zeigen Sie: $\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot f(x) = 0$.