Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Peter Rupp

WS 2015/16
20.11.2015

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

5. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 27.11.2015, 12.30 Uhr

Aufgabe 1

(a) Sei $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge reeller Zahlen und $H(a_n) \neq \emptyset$ sei die Menge der Häufungswerte von $(a_n)_{n=1}^\infty$. Sei $(\alpha_n)_{n=1}^\infty$ eine konvergente Folge in $H(a_n)$ und $\alpha := \lim_{n\to\infty} \alpha_n$. Zeigen Sie, dass dann $\alpha \in H(a_n)$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass eine Folge $(a_n)_{n=1}^\infty$ genau dann gegen a konvergiert, wenn jede Teilfolge von $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine gegen a konvergente Teilfolge besitzt.

Aufgabe 2 (K)

Zeigen Sie: Sind $(a_n)_{n=1}^\infty$ und $(b_n)_{n=1}^\infty$ beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$, so gilt:

(a) $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup\limits_{n\to\infty}(a_n) + \limsup\limits_{n\to\infty}(b_n)$

(b) $\limsup\limits_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n)$, und $\liminf\limits_{n\to\infty}(-a_n) = -\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n)$

(c) Finden Sie ein Beispiel, für das die Ungleichung in (a) strikt ist.

Aufgabe 3 (K)

Berechnen Sie den Reihenwert der folgenden Reihen:

(a) $\sum\limits_{n=0}^\infty \sum\limits_{m=0}^n \binom{n}{m} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+m}$

(b) $\sum\limits_{n=0}^\infty \left(1-(-1)^{n(n+1)/2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^n$

(c) $\sum\limits_{n=0}^\infty \frac{2+(-1)^n}{3^n}$

(d) $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{n}{(n+1)!}$, Hinweis: Teleskopsumme

Aufgabe 4

(a) Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine monoton wachsende und beschränkte Folge positiver Zahlen. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right)$$

konvergiert. Ist diese Aussage auch ohne die Beschränktheit der Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ richtig?

(b) Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge reeller Zahlen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ ist konvergent.

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ ist konvergent.