Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Peter Rupp

WS 2015/16
27.11.2015

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

6. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 4.12.2015, 12.30 Uhr

Aufgabe 1 (K)

Untersuchen Sie, ob das Cauchyprodukt der Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergiert oder divergiert:

(a) $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}},\ n \in \mathbb{N}_0$

(b) $a_0 = -1,\ b_0 = 2,\ a_n = 1,\ b_n = 2^n\ n \in \mathbb{N}$

(c) $a_n = (1 + \sqrt{n}\sqrt[3]{n}\sqrt[4]{n})^{-1},\ b_n = \frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n^2+n}}{n!},\ n \in \mathbb{N}_0$

Aufgabe 2

Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ eine Umordnung der konvergenten Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$. Die Folge $(\varphi(n) - n)_{n=1}^{\infty}$ sei beschränkt. Zeigen Sie, dass dann die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ gegen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Aufgabe 3 (K)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \binom{2n}{n}^{-1}$

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(3n)^n n!}$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$

(f) $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

(g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$

(h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^4+3n+1/n}{(n^3+1)(2n+3)}$

Aufgabe 4

Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine relle Folge mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die folgende Aussage:
Falls ein $C > 1$ existiert mit

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq 1 - \frac{C}{n} \qquad \text{für fast alle } n \in \mathbb{N},$$

so ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.