

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

7. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 11.12.2015, 12.30 Uhr

Aufgabe 1

- (a) Beweisen Sie den folgenden Verdichtungssatz von Cauchy: Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine reelle Folge mit $0 \leq a_{n+1} \leq a_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} 2^j a_{2^j} \text{ konvergiert.}$$

Hinweis: Verwenden Sie das Sandwich-Kriterium für die Folge der Teilsummen.

- (b) Beweisen Sie mit a), dass für alle $\alpha \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \alpha > 1.$$

- (c) Kann man in den Voraussetzungen für den Verdichtungssatz auf die Monotonie der Folge verzichten?

Aufgabe 2 (K)

Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Konvergenzradius und die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe konvergiert.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)^n x^n$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n!}} x^n$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + (-1)^n)^n x^n$

(d) $\sum_{n=7}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) x^n$

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) x^n$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^3} x^n$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n}\right)^n x^{2n}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2(n+1)} x^{n^2}$

Aufgabe 3

- (a) Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit $a_n \in \mathbb{Z}$ ($n \in \mathbb{N}_0$) und Konvergenzradius $R > 1$. Zeigen Sie, dass f ein Polynom ist.

- (b) Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine beschränkte Folge mit $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n > 0$. Berechnen Sie den Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Aufgabe 4 (K)

- (a) Geben Sie diejenige dyadische (2-adische) Entwicklung mit 8 Nachkommastellen an, die die Dezimalentwicklung 0,18279 am besten approximiert. Wie groß ist der Fehler?
- (b) Geben Sie die gefundene dyadische Entwicklung als 16-adische Entwicklung an, wobei für die Ziffern 10, ..., 15 die Buchstaben A, \dots, F verwendet werden sollen.