

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

8. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 18.12.2015, 12.30 Uhr

Aufgabe 1 (K):

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 4x + 3}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^{3/2} - x^{3/2}}{\sqrt{x}}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$

(d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2(x+1)(x^2-4)}{|x|^3}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

(f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x}$

Aufgabe 2 (K):

(a) Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{x^4 - 10x^2 + 9}{x^2 - 4x + 3}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}, \quad f(1) = a, \quad f(3) = b.$$

Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass f stetig auf \mathbb{R} ist.

(b) Es seien $f, g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen. Beweisen oder widerlegen (mit Beispiel) folgende Aussagen:

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x))^2$ existiert $\implies \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existiert.

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)$ und $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x))$ existieren
 $\implies \lim_{x \rightarrow 0} (f(x)g(x))^2$ existiert.

(iii) f ist beschränkt und $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 \implies \lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = 0$.

Aufgabe 3:

Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ genüge der Ungleichung $f(x+y) \leq f(x)f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und es gelte $f(0) = 1$. Zeigen Sie:

Ist f an der Stelle 0 stetig, so ist f auf \mathbb{R} stetig.

Aufgabe 4:

Sei $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in (0, 1) \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, & \text{falls } x = \frac{p}{q} \text{ vollständig gekürzt mit } p \in \mathbb{N}_0, q \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle Punkte, an denen f stetig ist.