Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Peter Rupp

WS 2015/16
18.12.2015

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

9. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 08.01.2016, 12.30 Uhr

Aufgabe 1 (K):

(a) Es sei $D \subseteq \mathbb{R},\ D \neq \emptyset$, und es sei $(f_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge von Funktionen $f_n :\ D \to \mathbb{R}$, welche punktweise auf D gegen eine Funktion $f :\ D \to \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie: Genau dann konvergiert $(f_n)_{n=1}^\infty$ gleichmäßig gegen f auf D, wenn für jede Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ in D gilt:

$$\lim_{n\to\infty} (f_n(x_n) - f(x_n)) = 0.$$

(b) Es sei $f_n :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ eine Folge monoton wachsender Funktionen mit

(i) $f_n(a) \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(b) = 0$

Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n=1}^\infty$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert auf $[a,b]$.

(c) Geben Sie $D \subset \mathbb{R}$ und ein streng monotones $f \in C(D)$ an, sodass $f^{-1} \notin C(f(D))$.

Aufgabe 2 (K):

Untersuchen Sie die Funktionenfolgen $(f_n)_{n=1}^\infty$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

(a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{x^2}{1+(nx)^2}$,

(b) $f_n :\ [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{n^3 x}{1+(nx)^3}$,

(c) $f_n :\ [\frac{1}{2}, 1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{n^3 x}{1+(nx)^3}$,

(d) $f_n :\ [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \sqrt[n]{n^3 x}$

(e) $f_n :\ [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = (cx(1-x))^n$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3:

Untersuchen Sie die folgenden Funktionenreihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{x^3+n^3},\ x \in [0,1]$,

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^2}{(1+x^2)^n},\ x \in \mathbb{R}$,

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}, \ x \in \mathbb{R},$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((n+1)x)^n}{n!}, \ x \in (-\frac{1}{6}, \frac{1}{4}]$

Aufgabe 4:
Beweisen Sie den Satz von Dini:

Die Folge stetiger Funktionen $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ auf $[a,b]$ sei monoton wachsend, d.h. $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ $(x \in [a,b])$. Konvergiert $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ punktweise auf $[a,b]$ gegen die stetige Funktion f, so ist die Konvergenz gleichmäßig auf $[a,b]$.
Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 1a).

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr.