Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Peter Rupp

WS 2015/16
18.12.2015

Ergänzung zur Übung vom 04.12.2015

Beispiel:
Untersucht werden soll der Grenzwert (für $x \to 0$) der Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\, x \mapsto x^2 \left[\frac{1}{x}\right],$$

dabei bezeichne $[x]$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist. Aus der Definition der Klammer erhält man $[x] \le x < [x+1] \le x+1$ $(x \in \mathbb{R})$. Somit gilt:

$$x - x^2 = x^2 \left(\frac{1}{x} - 1\right) \le \left[\frac{1}{x}\right] x^2 \le x^2 \frac{1}{x} = x \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Sei nun $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ eine beliebige Folge aus $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Dann gilt auch $x_n - x_n^2 \to 0$ und daher nach Sandwichkriterium ebenfalls $\left[\frac{1}{x_n}\right] x_n^2 \to 0$. Da die Folge beliebig war, gilt

$$\lim_{x \to 0} x^2 \left[\frac{1}{x}\right] = 0.$$

Übung aus der Übung:
Beh: Sei $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ eine relle Folge. Dann gilt:

$$x_n \to \infty \ (n \to \infty) \qquad \Leftrightarrow \qquad x_n > 0 \ (\text{f.f.a. } n \in \mathbb{N}) \ \wedge \ \frac{1}{x_n} \to 0 \ (n \to \infty).$$

Bew: (“$\Rightarrow$”): Falls $x_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, so gibt es zu jedem $R > 0$ ein $N_R \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \ge N_R$ gilt: $x_n > R$. Damit folgt der erste Teil der rechten Seite direkt. Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wähle $N_R \in \mathbb{N}$ zu $R := \frac{1}{\varepsilon}$. Dann gilt

$$\frac{1}{x_n} < \frac{1}{R} = \varepsilon \qquad (n \ge N_R)$$

.
(“$\Leftarrow$”): Nach Voraussetzung gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \ge N_\varepsilon$ gilt: $\left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon$. Da $x_n > 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, können die Beträge weggelassen werden, sofern N_ε groß genug gewählt ist. Sei nun $R > 0$ vorgegeben. Setze $\varepsilon := \frac{1}{R}$. Dann gilt für alle $n \ge N_\varepsilon$:

$$x_n = \frac{1}{\frac{1}{x_n}} > \frac{1}{\varepsilon} = R.$$

$\square$