Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Dr. Peter Rupp

WiSe 2018/19
21.12.2018

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

10. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 11.01.2019, 12:30 Uhr

Aufgabe 37

(a) Es sei $D \subseteq \mathbb{R},\ D \neq \emptyset$, und es sei $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$, welche punktweise auf D gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie: Genau dann konvergiert $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ gleichmäßig gegen f auf D, wenn für jede Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in D gilt:

$$\lim_{n\to\infty} (f_n(x_n) - f(x_n)) = 0.$$

(b) Es sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ eine Folge monoton wachsender Funktionen mit

(i) $f_n(a) \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(b) = 0$

Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert auf $[a,b]$.

(c) Geben Sie $D \subseteq \mathbb{R}$ und ein streng monotones $f \in C(D)$ an, sodass $f^{-1} \notin C(f(D))$.

Aufgabe 38 (K)

Untersuchen Sie die Funktionenfolgen $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

(a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{x^2}{1+(nx)^2}$,

(b) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{n^3 x}{1+(nx)^3}$,

(c) $f_n : [\frac{1}{2},1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{n^3 x}{1+(nx)^3}$,

(d) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \sqrt[n]{n^3 x}$

Aufgabe 39 (K)

(a) Beweisen Sie, dass die Funktionenreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ für jedes $x \in (1, \infty)$ konvergiert und die Grenzfunktion

$$\zeta:\ (1,\infty) \to \mathbb{R},\ \zeta(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

stetig ist.

(b) Untersuchen sie die folgenden Funktionenfolgen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

(i) $f_n:\ (0,\infty) \to \mathbb{R},\ f_n(x) := \exp(-nx^2)$

(ii) $f_n:\ (0,\infty) \to \mathbb{R},\ f_n(x) := x \cdot \exp(-nx^2)$

Aufgabe 40

Es sei $\phi:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\phi \neq 0$, $\phi(x) \in [0,1)$ $(x \in \mathbb{R})$ und $\phi(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R} \setminus [1,2])$. Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

(a) $f_n(x) := \phi(x-n)$

(b) $f_n(x) := \phi(\frac{x}{n})$

(c) $f_n(x) := \phi(nx)$

(d) $f_n(x) := \phi(x)^n$