Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Dr. Peter Rupp

WiSe 2018/19
11.01.2019

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

11. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 18.01.2019, 12:30 Uhr

Aufgabe 41

(a) Seien eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$ und eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit der Eigenschaft $g(x) \cdot x \to \infty$ $(x \to 0)$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Funktion $\frac{f}{g}$ in 0 differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung in 0.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} |x|^{5/4} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

in 0 differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung in 0.

Aufgabe 42 (K):
Berechnen Sie die Ableitung von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an allen Stellen $x \in \mathbb{R}$. Dabei ist f definiert durch:

(a) $f(x) := \begin{cases} x^2 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(b) $f(x) := \frac{e^{x^2}}{1+x^2-x}$

(c) $f(x) := (1 + x^4)^x$

(d) $f(x) := e^{\sin(x)^2} e^{\cos(x)^2}$

(e) $f(x) := \log(1 + x^2) \sin(x)$

(f) $f(x) := (1 + x^2)^{-1} x^3$

Aufgabe 43:
Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, in denen die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist und berechnen Sie für diese x die Ableitung $f'(x)$:

$$f(x) := \begin{cases} x^4 - 2x^3 + x^2, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Aufgabe 44 (K):
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} x \log(x^2)$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log(x^2+3)}{\log(x+1)}$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(1+x)^p}{1+x^p}, \ (p > 0)$

(e) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin(\cos(3x/2))}{x-\pi}$

(f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\log(1+2e^{-x})}{\sqrt{1+x^2}}$

(g) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+x-2}{x^2-x+2}$

(h) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{\log(x)}$