

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

12. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 25.01.2019, 12:30 Uhr

Aufgabe 45

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Abbildung mit $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$. Beweisen Sie die Existenz eines $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f'(x_0) = 0$.

Aufgabe 46 (K)

- (a) Zeigen Sie, dass die Abbildungen $x \mapsto \sin(x)$ auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und $x \mapsto \cos(x)$ auf $[0, \pi]$ Umkehrfunktionen $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ und $\arccos : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ besitzen. Berechnen Sie deren Ableitung in $(-1, 1)$.
- (b) Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(\sqrt{x+1}) - \sin(\sqrt{x})$.
- (c) Beweisen Sie die Potenzreihendarstellung

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (x \in [-1, 1]).$$

Aufgabe 47 (K)

- (a) Beweisen Sie die Lipschitz-Stetigkeit der folgenden Abbildungen:

(i) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

(ii) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x e^{-x^2}$

- (b) Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen:

(i) $x e^x - y e^y \leq x(x - y)e^y \quad (x < y < 0)$

(ii) $x^2 \log(x) - y^2 \log(y) \leq x(1 + 2 \log(x))(x - y) \quad (x > y > 1)$

Aufgabe 48

- (a) Zeigen Sie $e \notin \mathbb{Q}$, indem Sie den Satz von Taylor für die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := e^x$ verwenden.
- (b) Bestimmen Sie $n \in \mathbb{N}$ möglichst klein, sodass $|(T_n \sin)(1, 0) - \sin(1)| < 10^{-5}$ gilt.