

## Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

### 14. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 08.02.2019, 12:30 Uhr

#### Aufgabe 53 (K)

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz:

(a)  $\int_2^\infty \frac{\sin(x)}{2x^2+3x-4} dx$

(b)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{x}}{\sin(x)} dx$

(c)  $\int_1^\infty \frac{\log(x)}{2+x^t} dx, t > 0$

(d)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-\cos(x)} dx$

(e)  $\int_0^\infty \cos(x^2) dx$

(f)  $\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x} dx$

#### Aufgabe 54

(a) Es sei  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und es gelte

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x f(x) dx = 0, \quad \int_0^1 x^2 f(x) dx = 1$$

Zeigen Sie, dass ein  $x_0 \in (0, 1)$  existiert mit  $|f(x_0)| \geq 12$ .

Hinweis: Berechnen Sie  $\int_0^1 (x - 1/2)^2 f(x) dx$  und benutzen Sie ohne Beweis, dass aus  $f \in R([a, b]), f(x) > 0 (x \in [a, b])$  folgt:  $\int_a^b f(x) dx > 0$ .

(b) Es sei  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $c \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = c.$$

Gilt auch die Umkehrung?

#### Aufgabe 55 (K)

Es sei  $N \in \mathbb{N}$ . Berechnen Sie

(a) (i)  $\sum_{k=1}^N \cos(kx) (x \in \mathbb{R})$

(ii)  $\sum_{k=1}^N \sin(kx) (x \in \mathbb{R})$

- (b) Berechnen Sie Imaginärteil, Realteil, Argument und Betrag der folgenden komplexen Zahl

$$\left( \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} \right)^{2019} .$$

- (c) Berechnen Sie den Real- und Imaginärteil der achten Einheitswurzeln.

### Aufgabe 56

Berechnen Sie alle komplexen Lösungen der folgenden Gleichungen

(a)  $z^3 = 8$

(b)  $z^2 - 4z + 3 = 0$

(c)  $z^3 - 3z^2 + 2z - 6 = 0$

(d)  $z^4 + 5z^2 + 6 = 0$