Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Dr. Peter Rupp

WiSe 2018/19
12.11.2018

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

4. Übungsblatt

Abgabe bis Montag, 19.11.2018, 07.45 Uhr
Bitte beachten Sie die Öffnungszeiten des Mathematikgebäudes

Aufgabe 13

(a) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie:

(i) $\sqrt[n]{a+b} \leq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$

(ii) $|\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}| \leq \sqrt[n]{|a-b|}$

(b) Untersuchen Sie, ob die Folgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergieren und bestimmen Sie jeweils gegebenenfalls ihren Grenzwert:

(i) $a_n := \sqrt[n]{2 + \frac{n-1}{n+1}}$

(ii) $a_n := \sqrt[n^2]{n^{2n} + n^{3n}}$

Aufgabe 14 (K)

(a) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ definiert durch $a_n = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} k^{-1}$ $(n \in \mathbb{N})$ monoton wachsend ist und konvergiert. Zeigen Sie weiter, dass für den Grenzwert $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ die folgende Abschätzung gilt:

$$\frac{7}{12} \leq a \leq \frac{5}{6}$$

Hinweis: Betrachten Sie die Teilfolge $(a_{2n+1})_{n=1}^{\infty}$.

(b) Bestimmen Sie sämtliche Häufungswerte der Folgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ und bestimmen Sie jeweils, sofern existent, ihren Grenzwert. Beweisen Sie Ihre Aussagen:

(i) $a_n := (2^n + (-2)^n)n$ $(n \in \mathbb{N})$

(ii) $a_n := (-1)^n \frac{3n+1}{2n+2}$ $(n \in \mathbb{N})$

(iii) $a_n := \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2n}\right)^{3n}$ $(n \in \mathbb{N})$

Aufgabe 15 (K)
Untersuchen Sie, ob die Folgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

(a) $a_n := \sqrt[n]{2^n + (-2)^n + n^{-1}}$ $(n \in \mathbb{N})$

(b) $a_n := \sqrt[3]{n}(\sqrt[n]{n} - 1)$ $(n \in \mathbb{N})$

(c) $a_n := \sqrt[7]{n^4}(\sqrt[n]{n} - 1)$ $(n \in \mathbb{N})$

(d) $a_n := \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{n^4}$ $(n \in \mathbb{N})$

Aufgabe 16
Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge mit den folgenden Eigenschaften:

- $(a_{2n})_{n=1}^{\infty}$ und $(a_{2n-1})_{n=1}^{\infty}$ konvergieren.
- $(a_{3n})_{n=1}^{\infty}$ konvergiert.

Zeigen Sie, dass dann $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert. Zeigen Sie weiter, dass die Folge nicht notwendigerweise konvergiert, falls nur die erste, aber nicht die zweite Eigenschaft erfüllt ist.