

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

5. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 23.11.2018, 12:30 Uhr

Aufgabe 17

- (a) Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge reeller Zahlen und $H(a_n) \neq \emptyset$ sei die Menge der Häufungswerte von $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Sei $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ eine konvergente Folge in $H(a_n)$ und $\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$. Zeigen Sie, dass dann $\alpha \in H(a_n)$ gilt. Folgern Sie, dass $\max H(a_n)$ und $\min H(a_n)$ existieren, sofern $H(a_n)$ beschränkt ist.
- (b) Zeigen Sie, dass eine Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ genau dann gegen a konvergiert, wenn jede Teilfolge von $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine gegen a konvergente Teilfolge besitzt.

Aufgabe 18 (K)

Zeigen Sie: Sind $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ beschränkte Folgen in \mathbb{R} , so gilt:

- (a) $\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$
- (b) $\limsup_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = -\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$, und $\liminf_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = -\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$
- (c) Finden Sie ein Beispiel, für das die Ungleichung in (a) strikt ist.

Aufgabe 19 (K)

Berechnen Sie den Reihenwert der folgenden Reihen:

- (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+m}$
- (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - (-1)^{n(n+1)/2}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^n$
- (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{4^n}$
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n}{(n+2)!}$, Hinweis: Teleskopsumme

Aufgabe 20

- (a) Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine monoton wachsende und beschränkte Folge positiver Zahlen. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right)$$

konvergiert. Ist diese Aussage auch ohne die Beschränktheit der Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ richtig?

- (b) Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge reeller Zahlen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ ist konvergent.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ ist konvergent.