Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Dr. Peter Rupp

WiSe 2018/19
23.11.2018

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

6. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 30.11.2018, 12:30 Uhr

Aufgabe 21

Untersuchen Sie, ob das Cauchyprodukt der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergiert oder divergiert:

(a) $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$

(b) $a_0 = -1,\ b_0 = 2,\ a_n = 1,\ b_n = 2^n$ $(n \in \mathbb{N})$

(c) $a_n = (1 + \sqrt{n}\sqrt[3]{n}\sqrt[4]{n})^{-1},\ b_n = \frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n^2+n}}{n!}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$

Aufgabe 22 (K)

(a) Bestimmen Sie alle $q \in \mathbb{Q}$, für welche die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^q}$ konvergiert.

(b) Es sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge mit $a_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Zeigen Sie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}} \text{ konvergiert.}$$

Gilt auch die Umkehrung?

(c) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!\,(2n)!}{n!\,(4n)!}$

(ii) $\sum_{n=3}^{\infty} \binom{n}{2} \cdot \binom{n}{3}^{-1}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Aufgabe 23 (K)

(a) Es seien $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ reelle Folgen mit $a_n, b_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Ferner gelte: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ divergiert und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Beweisen Sie:

$$\inf\{a_n \cdot b_n^{-1} : n \geq k\} = 0 \qquad (k \in \mathbb{N})$$

(b) Berechnen Sie unter Verwendung der Identität $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ den Reihenwert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Aufgabe 24

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(3n)^n n!}$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \binom{2n}{n}^{-1}$