Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Dr. Peter Rupp

WiSe 2018/19
07.12.2018

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

8. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 14.12.2018, 12:30 Uhr

Aufgabe 29 (K)

(a) Beweisen Sie folgende Aussage: Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in D$ sei ein Häufungspunkt von D, sowie $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:

(i) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existiert.

(ii) Für jede Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in $D \setminus \{a\}$ mit $x_n < a$ ($n \in \mathbb{N}$), sowie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ und jede Folge $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ in $D \setminus \{a\}$ mit $y_n > a$ ($n \in \mathbb{N}$), sowie $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$ existieren und stimmen überein.

Untersuchen Sie folgende Grenzwerte auf Existenz und berechnen Sie diese gegebenenfalls:

(i) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{-3x^2+x+44}{x^2-2x-8}$

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty} x\,e^{-x}$

(iii) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+3x-1}{|x-1|+1}$

(iv) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2+4x+3}{|x+1|}$

Aufgabe 30 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-4x+3}$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x-1)^{3/2}-x^{3/2}}{\sqrt{x}}$

(c) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$

(d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2(x+1)(x^2-4)}{|x|^3}$

(e) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

(f) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x}$

Aufgabe 31

(a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{x^4 - 10x^2 + 9}{x^2 - 4x + 3}, \ x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}, \ f(1) = a, \ f(3) = b.$$

Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass f stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

(b) Es seien $f, g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ Funktionen. Beweisen oder widerlegen (mit Beispiel) folgende Aussagen:

(i) $\lim\limits_{x\to 0}(f(x))^2$ existiert $\Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existiert.

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x)$ und $\lim\limits_{x\to 0}(f(x) + g(x))$ existieren
$\Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0}(f(x)g(x))^2$ existiert.

(iii) f ist beschränkt und $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x) = 0$.

Aufgabe 32 (K)

Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ derart, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist. Dabei ist f definiert durch

(a) $f(x) := \frac{x^4+2x^3-x^2+4x-6}{x^2+2x-3}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}), \ f(-3) = a, \ f(1) = b$

(b) $f(x) := \frac{x^4+3x^2-28}{x^2-4}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}), \ f(-2) = a, \ f(2) = b$