Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Dr. Peter Rupp

WiSe 2018/19
14.12.2018

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

9. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 21.12.2018, 12:30 Uhr

Aufgabe 33 (K)
Berechnen Sie für die folgenden Funktionen die Umkehrfunktion.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} x & x \leq 0 \\ \frac{1}{x} + 3 & x > 0 \end{cases}$

(c) $f : [2, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) := \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

(d) $f : [1, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) := e^{x^2 - 2x + 8}$

Aufgabe 34
Beweisen Sie die ausstehenden Aussagen aus Satz 7.10: Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$, dann gilt:

(a) D ist genau dann abgeschlossen, wenn jeder Häufungswert von D in D liegt.

(b) Falls D kompakt ist, so ist D beschränkt und abgeschlossen.

Aufgabe 35

(a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Beweisen Sie, dass dann Konstanten $\alpha, \beta > 0$ existieren, sodass gilt:
$$|f(x)| \leq \alpha + \beta |x| \qquad (x \in \mathbb{R})$$

(b) Beweisen Sie, dass die Wurzelfunktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) := \sqrt{x}$ nicht Lipschitz-stetig ist.

Aufgabe 36 (K)

(a) Beweisen Sie, dass die Funktion
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \frac{x}{2 + x^4}$$
gleichmäßig stetig ist.

— bitte wenden —

(b) Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$. Es sei weiter $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgender Eigenschaft: Es existiert ein $L > 0$ mit:

$$|f(x) - f(y)| \leq L\sqrt{|x-y|} \qquad (x, y \in D).$$

Beweisen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist.

(c) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, sowie eine stetige Funktion $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ gegeben. Beweisen Sie, dass f genau dann gleichmäßig stetig ist, wenn $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ existiert.