

## Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

### Präsenzübungsblatt

#### Aufgabe 1

Es seien  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  mathematische Aussagen. Formulieren Sie die Aussage “entweder  $\mathcal{A}$  oder  $\mathcal{B}$ ” mit logischen Verknüpfungen. Zeigen Sie jeweils mittels einer Wahrheitstafel die folgenden tautologischen Äquivalenzen:

- (a)  $\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \equiv (\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B})$ ,                      (b)  $\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \equiv (\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B})$ ,  
(c)  $(\mathcal{A} \implies \mathcal{B}) \equiv (\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$ ,                      (d)  $(\mathcal{A} \implies \mathcal{B}) \equiv (\neg\mathcal{B} \implies \neg\mathcal{A})$ .

#### Aufgabe 2

Sei  $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$  nach unten beschränkt. Beweisen Sie, dass eine größte untere Schranke  $\inf(M)$  existiert.

#### Aufgabe 3

Sei  $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$  eine beschränkte Menge. Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

- (a)  $\exists a \in \mathbb{R}: M = \{a\}$ ,  
(b)  $\sup(M) = \inf(M)$ .

#### Aufgabe 4

(a) Faktorisieren Sie mit Hilfe der binomischen Formeln.

- (i)  $b^2 - 9$ ,                      (ii)  $x^2 - 8x + 16$ ,  
(iii)  $25a^2 + 20ab^2 + 4b^4$ ,                      (iv)  $a^8 - 2a^4b^2 + b^4$ .

(b) Faktorisieren Sie.

- (i)  $x^2 - x - 2$ ,                      (ii)  $3u^2 - 12$ ,  
(iii)  $18a^3 + 84a^2b + 98ab^2$ ,                      (iv)  $(a - b)^2 - (a + b)^2$ .

## Aufgabe 5

- (a) Es sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $n^2$  gerade. Zeigen Sie, dass  $n$  gerade ist.
- (b) Beweisen Sie: Für  $a, b, c \in \mathbb{R}$  gilt:  $(a < b \wedge c < 0) \Rightarrow ac > bc$
- (c) Beweisen Sie: Für  $a, b \in [0, \infty)$  gilt:  $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$ .

## Aufgabe 6

### Der Barbier von Karlsruhe

In Karlsruhe gibt es seit Gründung der Stadt das Gesetz, dass alle Personen männlichen Geschlechts sich jeden Morgen zu rasieren haben. Nichteinhaltung dieses Gesetzes wird hart bestraft und es wird daher von jedem Mann befolgt. Um dieser Pflicht nachzukommen, gibt es heutzutage zwei Möglichkeiten: Entweder man rasiert sich selbst oder man sucht den Barbier von Karlsruhe auf, der als einziger seines Fachs beruflich nicht auf Webdesign umgesattelt hat. Dieser ist ein kleiner kauziger Mann, der schon sein ganzes Leben in Karlsruhe verbringt und des Öfteren seine Mitbürger durch seine strikte Definition des Barbierberufs vor Rätsel stellt. Seiner Meinung nach, sei ein Barbier jemand, der diejenigen, und nur diejenigen rasiert, die sich nicht selbst rasieren.

**Frage:** Rasiert der Barbier von Karlsruhe sich selbst, oder nicht?