Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Dr. Maria Radosz

SS 2013

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik
Lösungsvorschläge zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Beachte: Für Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $A = (a_{ij})$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ mit $B = (b_{ij})$ gilt: $(AB)_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung in $\mathbb{R}^n$ folgt:

$$\begin{aligned}
\|AB\|^2 &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p}(AB)_{ij}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_{kj}^2\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} b_{kj}^2\right) \\
&= \|A\|^2 \cdot \|B\|^2.
\end{aligned}$$

b) Für die k-te Partialsumme gilt nach der Cauchy-Schwarz Ungleichung im $\mathbb{R}^k$:

$$\sum_{n=1}^{k} a_n b_n \leq \left(\sum_{n=1}^{k} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{k} b_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Damit folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k} a_k b_k \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Aufgabe 2 (K)

(Beachte: Die Angabe der Menge D wird nicht explizit verlangt; es muss aber beispielweise klar sein, dass $(x_n, y_n) \neq (0,0)$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, wenn eine Folge mit $(x_n, y_n) \to (0,0)$ betrachtet wird.)

a) i) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq -y\}$. Der Grenzwert existiert nicht, denn für die durch $x_n = \frac{1}{n}, y_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}$ gegebene Folge in D (für $n \geq 2$) gilt $(x_n, y_n) \to (0,0), (x_n, y_n) \neq (0,0)$ und

$$\frac{x_n}{x_n + y_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = n \to \infty \quad (n \to \infty).$$

ii) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sin(x+y^2-1) \neq 0\}$. Sei (x_n, y_n) beliebige Folge in D mit $(x_n, y_n) \to (0,1)$. Dann $x_n \to 0, y_n \to 1$ und nach den Grenzwertrechenregeln $z_n := x_n + y_n^2 - 1 \to 0$. Es folgt nach l'Hospital

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(x_n + y_n^2 - 1) - 1}{\sin(x_n + y_n^2 - 1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(z_n) - 1}{\sin(z_n)} = \lim_{z\to 0} \frac{\cos(z) - 1}{\sin(z)} \overset{l'Hospital}{=} \lim_{z\to 0} \frac{-\sin(z)}{\cos(z)} = 0.$$

Daher

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\cos(x+y^2-1) - 1}{\sin(x+y^2-1)} = 0.$$

iii) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$. Der Grenzwert existiert nicht, denn $x_n = 4 - \frac{1}{n}, y_n = 4 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ erfüllt $(x_n, y_n) \to (4,4), (x_n, y_n) \neq (4,4)$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\frac{4 - x_n}{y_n - x_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = n \to \infty \quad (n \to \infty).$$

iv) $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,2)\}$. Sei (x_n, y_n) Folge in D mit $(x_n, y_n) \to (-1,2)$. Dann $x_n \to -1$ und $y_n \to 2$ und es folgt nach den Grenzwertrechenregeln

$$\lim_{n\to\infty} \exp\left(2\sin(x_n^2 - y_n)x_n y_n^2 + \log(x_n^2 + 1)\right) = \exp\left(2\sin(-1)(-4) + \log(2)\right) = 2e^{8\sin(1)}.$$

b) Nach Satz 16.4.(3) sind f, g in allen Punkten $(x,y) \neq (0,0)$ stetig (Nenner > 0).

i) f ist stetig im Nullpunkt, denn

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \frac{x^2|y|}{x^2 + 5y^2} \leq \frac{(x^2 + 5y^2)|y|}{x^2 + 5y^2} = |y| \to 0 \quad ((x,y) \to (0,0))$$

ii) g ist unstetig im Nullpunkt, denn $x_n = y_n = \frac{1}{n}$ erfüllt $(x_n, y_n) \to 0, (x_n, y_n) \neq (0,0)$ und

$$|g(x_n, y_n) - g(0,0)| = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2} \not\to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Aufgabe 3 (K)

Wir verwenden, dass die Mengen nichtleer und nicht der ganze Raum sind, also dürfen wir verwenden, dass eine Menge nicht gleichzeitig offen und abgeschlossen sein kann.

a) M_1 ist offen und beschränkt. Damit folgt: M_1 ist nicht abgeschlossen und nicht kompakt.
Offenheit: Sei $(x,y) \in M_1$. Dann existiert ein $\delta \in (0,1)$ mit $\delta < \sqrt{x^2 + 5y^2} < 1 - \delta$. Für alle $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned}
x'^2 + 5y'^2 &= x^2 + 5y^2 + 2((x - x') + 5(y - y')) + (x - x')^2 + 5(y - y')^2 \\
&< 1 - \delta + 10(|x - x'| + |y - y'|) + 5\|(x - x', y - y')\|^2 \\
&< 1 - \delta + 20\|(x - x', y - y')\| + 5\|(x - x', y - y')\|^2 \\
x'^2 + y'^2 &= x^2 + y^2 + 2((x - x') + (y - y')) + (x - x')^2 + (y - y')^2 \\
&> \delta - 2(|x - x'| + |y - y'|) \\
&> \delta - 4\|(x - x', y - y')\|
\end{aligned}$$

Wähle $\varepsilon = \frac{\delta}{25} < 1$. Dann gilt für alle (x', y') mit $\|(x - x', y - y')\| < \varepsilon$

$$x'^2 + 5y'^2 < 1 - \delta + 20\varepsilon + 5\varepsilon^2 < 1 - \delta + 25\varepsilon < 1$$

sowie

$$x'^2 + y'^2 > \delta - 4\varepsilon > 0.$$

Alternativ kann man auch zeigen, dass M_1^c abgeschlossen ist:
Es gilt: $M_1^c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + 5y^2 \leq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + 5y^2 \geq 1\} = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + 5y^2 \geq 1\}$. Da $\{(0,0)\}$ abgeschlossen ist, bleibt nur noch zu zeigen, dass die Menge $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + 5y^2 \geq 1\}$ abgeschlossen ist (die Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen ist wieder abgeschlossen). Sei (x_n, y_n) eine konvergente Folge in B, d.h. $x_n^2 + 5y_n^2 \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(x_n, y_n) \to (x,y)$. Insbesondere gilt $x_n \to x, \ y_n \to y$. Dann gilt nach den Grenzwertrechenregeln: $x^2 + 5y^2 = \lim_{n\to\infty} x_n^2 + 5y_n^2 \geq 1$, also $(x,y) \in B$. Dies zeigt die Abgeschlossenheit von B und die Offenheit von M_1 folgt.

Beschränktheit: Für $(x,y) \in M_1$ gilt $\|(x,y)\|^2 \leq x^2 + 5y^2 < 1$.

b) M_2 ist weder offen noch beschränkt noch abgeschlossen, also auch nicht kompakt.
Offenheit: Es gilt $(0,0) \in M_2$, aber $(0,-\varepsilon) \notin M_2$ für alle $\varepsilon > 0$.
Abgeschlossenheit: $(x_n, y_n) = (2 - \frac{1}{n}, 0)$ für $n \in \mathbb{N}$ ist Folge in M_2 mit Grenzwert $(2,0) \notin M_2$.
Unbeschränktheit: $(1 - e^{-n}, n) \in M_2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gilt

$$\|(1 - e^{-n}, n)\|^2 = (1 - e^{-n})^2 + n^2 \geq n^2 \to \infty \quad (n \to \infty).$$

c) M_3 ist abgeschlossen und unbeschränkt, also nicht offen und nicht kompakt.
Abgeschlossenheit: Sei (x_n, y_n, z_n) Folge in M_3 und $(x_n, y_n, z_n) \to (x,y,z)$ für ein $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, insbesondere $x_n \to x, y_n \to y, z_n \to z$. Dann folgt aus $(x_n + 2y_n)^2 = 1 + z_n^2$ nach den Grenzwertrechenregeln

$$(x + 2y)^2 = \lim_{n\to\infty} (x_n + 2y_n)^2 = \lim_{n\to\infty} 1 + z_n^2 = 1 + z^2,$$

d.h. $(x,y,z) \in M_3$.
Unbeschränktheit: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $(\sqrt{n^2+1}, 0, n) \in M_3$ und

$$\|(\sqrt{n^2+1}, 0, n)\|^2 = 2n^2 + 1 \to \infty \quad (n \to \infty).$$

d) M_4 ist beschränkt abgeschlossen, also kompakt und nicht offen.
Beschränktheit: Für $(x,y,z) \in M_3$ gilt

$$z \geq |x| - y \geq -|y| \geq -2,$$

also $|z| \leq \max\{2, 10\} = 10$. Daher

$$\begin{aligned}
|x|^2 + |y|^2 + |z|^2 &\leq (y+z)^2 + |y|^2 + |z|^2 \\
&\leq 3y^2 + 3z^2 \\
&\leq 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 10^2 \\
&= 312.
\end{aligned}$$

Abgeschlossenheit: Sei $(x_n, y_n, z_n) \in M_4$ und $(x_n, y_n, z_n) \to (x,y,z)$ für ein $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, insbesondere $x_n \to x, y_n \to y, z_n \to z$. Es folgt

$$\begin{aligned}
|x| &= \lim_{n\to\infty} |x_n| \leq \lim_{n\to\infty} y_n + z_n = y + z, \\
|y| &= \lim_{n\to\infty} |y_n| \leq 2, \\
z &= \lim_{n\to\infty} z_n \leq 10,
\end{aligned}$$

also $(x,y,z) \in M_4$.