Karlsruher Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2013
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Dr. Andreas Helfrich-Schkarbanenko

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik
Lösungsvorschläge zum 2. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 3.5.2013, 12.30 Uhr

Aufgabe 4 (K)

a) Es gilt nach Wurzelkriterium

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \left|\frac{1+2i}{4i}\right| = \frac{\sqrt{1+4}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{4},$$
$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|b_k|} = |1-3i| = \sqrt{10}.$$

Also konvergiert die Potenzreihe aus i) für $|z| < \frac{4}{\sqrt{5}}$ und divergiert für $|z| > \frac{4}{\sqrt{5}}$. Die Potenzreihe aus ii) konvergiert für $|z+2| < \frac{1}{\sqrt{10}}$ und divergiert für $|z+2| > \frac{1}{\sqrt{10}}$.
In i) gilt für $|z| = \frac{4}{\sqrt{5}}$

$$|a_k z^k| = \frac{k^3}{\sqrt{1+k^2}} \geq \frac{k^3}{\sqrt{2k^2}} = \frac{k^2}{\sqrt{2}} \qquad (k \in \mathbb{N}),$$

also liegt Konvergenz genau für $|z| < \frac{4}{\sqrt{5}}$ vor.
In ii) gilt für $|z+2| = \frac{1}{\sqrt{10}}$

$$|b_k(z+2)^k| = \frac{1}{\sqrt{5}k^4} \qquad (k \in \mathbb{N}),$$

so dass die Reihe absolut konvergiert. Es folgt Konvergenz genau für $|z+2| \leq \frac{1}{\sqrt{10}}$.

b) Wegen $|\frac{1+i}{3}| = \frac{\sqrt{2}}{3} < 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1+i}{3}\right)^{k+1} = \frac{1+i}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1+i}{3}\right)^{k} \overset{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{1+i}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1+i}{3}} = \frac{1+i}{2-i}.$$

Wegen $|\frac{2-i}{2+5i}| = \sqrt{\frac{5}{29}} < 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2-i}{2+5i}\right)^{k} \overset{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{1}{1-\frac{2-i}{2+5i}} = \frac{5}{6} - \frac{i}{3}.$$

Aufgabe 5 (K)

Die komplexe Fourierreihe von f ist gegeben durch $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$. Die komplexen Fourierkoeffizienten sind $c_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt$. Wir berechnen für beide Funktionen jeweils die komplexen Fourierkoeffizienten.

a)
$$c_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|t|}{\pi}\,dt=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}-\frac{t}{\pi}\,dt+\int_0^{\pi}\frac{t}{\pi}\,dt\right)=\frac{1}{2}.$$

Für $n\neq 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
c_n&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|t|}{\pi}e^{-int}\,dt\\
&=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{t}{\pi}e^{-int}\,dt+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{t}{\pi}e^{-int}\,dt\\
&=-\frac{1}{2\pi^2}\left[-\frac{t}{in}e^{-int}\Big|_{-\pi}^{0}+\int_{-\pi}^{0}\frac{1}{in}e^{-int}\,dt\right]+\frac{1}{2\pi^2}\left[-\frac{t}{in}e^{-int}\Big|_{0}^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{1}{in}e^{-int}\,dt\right]\\
&=-\frac{1}{2\pi^2}\left[\frac{(-1)^n i\pi}{n}+\frac{1}{n^2}e^{-int}\Big|_{-\pi}^{0}\right]+\frac{1}{2\pi^2}\left[\frac{(-1)^n i\pi}{n}+\frac{1}{n^2}e^{-int}\Big|_{0}^{\pi}\right]\\
&=\frac{1}{2\pi^2}\left[-\frac{1}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n^2}-\frac{1}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n^2}\right]=\frac{(-1)^n-1}{\pi^2n^2}\\
&=\begin{cases}0, & n \text{ gerade}\\ -\frac{2}{n^2\pi^2}, & n \text{ ungerade}\end{cases}
\end{aligned}$$

Da f symmetrisch, sind c_n reellwertig.

b)
$$c_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{t}{\pi}\,dt=\frac{1}{4}.$$

Für $n\neq 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
c_n&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-int}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{t}{\pi}e^{-int}\,dt\\
&\overset{a)}{=}\frac{1}{2\pi^2n^2}\left(\pi i(-1)^n n+(-1)^n-1\right).
\end{aligned}$$

Der wesentliche Unterschied zwischen a) und b) ist die Stetigkeit/Unstetigkeit von f.

Aufgabe 6

a) Auf $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ ist die Funktion f als Komposition stetiger Funktionen stetig. Im Punkt $(0,0)$ ist f auch stetig: Mit Hilfe von $|xy|\leq\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ [Diese Ungleichung folgt aus der binomischen Formel: $0\leq(x+y)^2=x^2+2xy+y^2\ \Rightarrow -xy\leq\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ sowie $0\leq(x-y)^2=x^2-2xy+y^2\ \Rightarrow xy\leq\frac{1}{2}(x^2+y^2)$] ergibt sich für $(x,y)\neq(0,0)$

$$|f(x,y)|=\frac{|xy|}{x^2+y^2}\;|y|\leq\tfrac{1}{2}\;|y|\to 0\qquad\text{für } (x,y)\to(0,0),$$

also gilt $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$, d.h. f ist stetig in $(0,0)$.

b) Die Funktion g ist nicht stetig in $(0,0)$, denn es gilt

$$g(1/n^2,1/n)=\frac{1/n^4}{1/n^4+1/n^4}=\frac{1}{2}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{2}\neq 0=g(0,0)\,.$$

Sei nun $\phi\in\mathbb{R}$ fest gewählt. Im Fall $\cos\phi=0$ ist $g(r\cos\phi,r\sin\phi)=0\to 0=g(0,0)$ f"ur $r\to 0$. Im Fall $\cos\phi\neq 0$ ergibt sich

$$g(r\cos\phi,r\sin\phi)=\frac{r^3\cos\phi\sin^2\phi}{r^2\cos^2\phi+r^4\sin^4\phi}=\frac{r\cos\phi\sin^2\phi}{\cos^2\phi+r^2\sin^4\phi}\xrightarrow{r\to 0}\frac{0}{\cos^2\phi+0}=0=g(0,0)\,.$$

c) Wegen $h(x,x) = 1 \to 1 \neq 0 = h(0,0)$ f"ur $x \to 0$ ist die Funktion h in $(0,0)$ nicht stetig.

Sei $x \neq 0$. Dann gilt

$$h(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} = \frac{y^2}{y^2 + (1-y/x)^2} \xrightarrow{y\to 0} \frac{0}{0+1} = 0\,.$$

Folglich existiert $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} h(x,y)) = \lim_{x\to 0} 0 = 0 = h(0,0)$. Wegen $h(x,y) = h(y,x)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ existiert auch der andere iterierte Limes und hat den gleichen Wert.