Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Dr. Andreas Helfrich-Schkarbanenko

Sommersemester 2013

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik
Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 10.5.2013, 12.30 Uhr

Aufgabe 7 (K) Berechnen Sie für folgende Funktionen die partiellen Ableitungen wo immer sie existieren. Sind die Funktionen im Punkt $(0,0)$ stetig partiell differenzierbar?

$$\text{a) } f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad f(x,y)=\begin{cases}\frac{x}{y}(x^2+y^2) & ,x\in\mathbb{R}, y\neq 0\\ 0 & ,x\in\mathbb{R}, y=0\end{cases},$$

$$\text{b) } f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad f(x,y)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

Lösung:

a) Es gilt

$$f_x(x,y)=\begin{cases}0 & ,y=0\\ \frac{3x^2}{y}+y & ,y\neq 0\end{cases},\qquad f_y(x,y)=\begin{cases}0 & ,x=0,y=0\\ x-\frac{x^3}{y^2} & ,y\neq 0\end{cases}$$

und $f_y(x,0)$ existiert nicht für $x\neq 0$, denn für $h\to 0$ gilt

$$\left|\frac{f(x,h)-f(x,0)}{h}\right|=\frac{|x|}{|h|^2}(x^2+h^2)\to+\infty \quad \text{falls } x\neq 0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=0,\qquad f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,h)-f(0,0)}{h}=0.$$

Die Formeln für $f_x(x,y)$ bzw. $f_y(x,y)$ $(y\neq 0)$ folgen aus den üblichen Differentiationsregeln (vgl HM I). Daher ist f nicht stetig partiell differenzierbar in $(0,0)$, denn

$$f_x\left(\frac{1}{\sqrt{n}},\frac{1}{n}\right)=3+\frac{1}{n}\to 3\neq f_x(0,0).$$

b) Die partiellen Ableitungen sind gegeben durch

$$f_x(x,y)=\begin{cases}\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases},$$

$$f_y(x,y)=\begin{cases}\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases},$$

denn im Fall $(x,y)\neq(0,0)$ ist die Behauptung klar und nach l'Hôpital folgt

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h}=\lim_{z\to\infty}\frac{z}{e^{z^2}}=\lim_{z\to\infty}\frac{1}{2ze^{z^2}}=0,$$

analog $f_y(0,0) = 0$. Die partiellen Ableitungen sind stetig in $(0,0)$, denn für $(x_n, y_n) \to (0,0)$ und $z_n := x_n^2 + y_n^2 \to 0^+$ gilt

$$|f_x(x_n, y_n) - f_x(0,0)| = \frac{2|x_n|}{(x_n^2+y_n^2)^2} e^{-\frac{1}{x_n^2+y_n^2}} \leq \frac{2\sqrt{x_n^2+y_n^2}}{(x_n^2+y_n^2)^2} e^{-\frac{1}{x_n^2+y_n^2}} = \frac{2}{z_n^{3/2}} e^{-\frac{1}{z_n}} \to 0.$$

Aufgabe 8 (K)

a) Sei $f(x,y) = \log(\sqrt{x^2+y^2})$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Zeigen Sie:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

b) Sei $n \geq 3$ und $f(x) = \|x\|^{2-n}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Zeigen Sie:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \setminus \{(0,0)\}.$$

Lösung:

a) Es gilt für $(x,y) \neq (0,0)$

$$f_x(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad f_y(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2},$$
$$f_{xx}(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_{yy}(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

und damit die Behauptung.

b) Es gilt für $x \neq 0$ und $f(x) = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{2-n}{2}}$

$$f_{x_i}(x) = (2-n)x_i(x_1^2+\ldots+x_n^2)^{-\frac{n}{2}},$$
$$f_{x_ix_i}(x) = (2-n)(x_1^2+\ldots+x_n^2)^{-\frac{n}{2}}\left[1 - \frac{nx_i^2}{x_1^2+\ldots+x_n^2}\right]$$

und daher

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) &= \sum_{i=1}^{n}(2-n)(x_1^2+\ldots+x_n^2)^{-\frac{n}{2}}\left[1 - \frac{nx_i^2}{x_1^2+\ldots+x_n^2}\right] \\ &= (2-n)(x_1^2+\ldots+x_n^2)^{-\frac{n}{2}} \sum_{i=1}^{n}\left[1 - \frac{nx_i^2}{x_1^2+\ldots+x_n^2}\right] \\ &= (2-n)(x_1^2+\ldots+x_n^2)^{-\frac{n}{2}}\left[n - \frac{n(x_1^2+\ldots+x_n^2)}{x_1^2+\ldots+x_n^2}\right] \\ &= 0.\end{aligned}$$

Aufgabe 9 Berechnen Sie für folgende Funktionen alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung wo immer sie existieren.

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^4 - 2xy^3 + \sin(xy)$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \dfrac{2x+5y}{y^2+2}$

c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = xyz^2 - e^{\cos(xz)}$

d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$

Lösung:

a) Es gilt für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= 4x^3 - 2y^3 + y\cos(xy),\\
f_y(x,y) &= -6xy^2 + x\cos(xy),\\
f_{xx}(x,y) &= 12x^2 - y^2\sin(xy),\\
f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = -6y^2 + \cos(xy) - xy\sin(xy),\\
f_{yy}(x,y) &= -12xy - x^2\sin(xy).
\end{aligned}$$

b) Es gilt für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \frac{2}{y^2+2},\\
f_y(x,y) &= \frac{10-5y^2-4xy}{(y^2+2)^2},\\
f_{xx}(x,y) &= 0,\\
f_{xy}(x,y) &= -\frac{4y}{(y^2+2)^2},\\
f_{yy}(x,y) &= \frac{12xy^2+10y^3-60y-8x}{(y^2+2)^3}.
\end{aligned}$$

c) Es gilt für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
f_x(x,y,z) &= yz^2 + z\sin(xz)e^{\cos(xz)},\\
f_y(x,y,z) &= xz^2,\\
f_z(x,y,z) &= 2xyz + x\sin(xz)e^{\cos(xz)}\\
f_{xx}(x,y,z) &= z^2(\cos(xz) - \sin^2(xz))e^{\cos(xz)},\\
f_{xy}(x,y,z) &= f_{yx}(x,y,z) = z^2,\\
f_{xz}(x,y,z) &= f_{zx}(x,y,z) = 2yz + e^{\cos(xz)}(\sin(xz) + xz\cos(xz) - xz\sin^2(xz))\\
f_{yy}(x,y,z) &= 0,\\
f_{yz}(x,y,z) &= f_{zy}(x,y,z) = 2xz,\\
f_{zz}(x,y,z) &= 2xy + x^2e^{\cos(xz)}(\cos(xz) - \sin^2(xz)).
\end{aligned}$$

d) Es gilt

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}, \qquad f_y(x,y) = \begin{cases} \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{6x^2y^2 - x^4 - y^4}{(x^2+y^2)^3}, \qquad f_{yx}(x,y) = \frac{6x^2y^2 - x^4 - y^4}{(x^2+y^2)^3} \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0),$$

$$f_{xx}(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases},$$

$$f_{yy}(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Die partiellen Ableitungen $f_{xy}(0,0), f_{yx}(0,0)$ existieren nicht, denn

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{h^5} = \infty.$$

Analog zeigt man die Nichtexistenz von $f_{yx}(0,0)$.