Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Dr. Andreas Helfrich-Schkarbanenko

Sommersemester 2013

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik
4. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 17.5.2013, 12.30 Uhr
Themen: Differenzierbarkeit, Kettenregel, Mittelwertsatz, Richtungsableitung

Aufgabe 10 (K). Seien $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_1(x,y) = |x| + |y|, \quad f_2(x,y) = \sqrt{|x|^2 + |y|^2} \quad f_3(x,y) = \max\{|x|, |y|\}.$$

(a) Skizzieren Sie die Mengen

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; f_i(x,y) = c\}$$

für $i = 1,2,3$ und $c = 0,1,2$.

(b) In welchen Punkten des $\mathbb{R}^2$ ist $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(i = 1,2,3)$ differenzierbar? Berechnen Sie f_i' wo immer die Ableitung existiert.

Aufgabe 11 (K).

(a) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $g(t) = (e^t, \sin t, t^2)$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xyz$. Berechnen Sie für $h = f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Ableitung h' einmal nach der Kettenregel und einmal, indem Sie die explizit die Verkettung $f \circ g$ berechnen und differenzieren.

(b) Sei $V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, \; x,y,z \geq 0\}$. Zeigen Sie:

$$|\log(x + y + z^2)| \leq 4\sqrt{3 - 3z} \quad \text{für } (x,y,z) \in V.$$

Hinweis: Mittelwertsatz mit $a = (0,0,1)$, $b = (x,y,z)$, und Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

Aufgabe 12.

(a) Sei $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x = y\}$ sowie

$$f(x,y) = e^x - 1 \quad (x,y) \in M; \quad f(x,y) = 0 \quad (x,y) \notin M.$$

Zeigen Sie, dass die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ für jede Richtung v existiert. Ist f in $(0,0)$ differenzierbar?

(b) Berechnen Sie für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3 - x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ für jede Richtung v, für die das möglich ist. Für welche v gilt $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = (\operatorname{grad} f(0,0)) \cdot v$?