Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Dr. Andreas Helfrich-Schkarbanenko

Sommersemester 2013

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

5. Übungsblatt Abgabe bis Freitag, 24.5.2013, 12.30 Uhr

Themen: Richtungsableitung, Extrema, Satz von Taylor

Aufgabe 13 (K).

(a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ werde definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 < y < x^2\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie für f alle Richtungsableitungen im Nullpunkt, soweit sie existieren.

(b) Bestimmen Sie Lage, Art und Wert aller lokalen Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) \;=\; 3x - 3xy^2 + \frac{3}{2}x^2$$

Besitzt f ein globales Maximum bzw. Minimum?

Aufgabe 14 (K). Bestimmen Sie jeweils die Darstellung von $f(x_0 + h)$, die der Satz von Taylor für zweimal stetig partiell differenzierbare Funktionen liefert.

(a) $f(x,y) = \arctan(xy)\,, \quad x_0 = (1,1)$,

(b) $f(x,y,z) = xe^z - y^2\,, \quad x_0 = (1,-1,0)$.

Aufgabe 15.

(a) Bestimmen Sie alle Stellen lokaler Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, und entscheiden Sie, ob es sich dabei um Maxima oder Minima handelt.

(1) $f(x,y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$,

(2) $f(x,y) = x^4 + y^4 + 4xy - 2x^2 - 2y^2$.

(b) Sei A eine indefinite, symmetrische $(n \times n)$-Matrix.

(1) Zeigen Sie: Es existiert ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $(Ax) \cdot x = 0$ und $x \neq 0$.

(2) Bestimmen Sie für die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ein $x \in \mathbb{R}^2$ mit $(Ax) \cdot x = 0$ und $x \neq 0$.