Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Dr. Andreas Helfrich-Schkarbanenko

Sommersemester 2013

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

5. Übungsblatt Abgabe bis Freitag, 24.5.2013, 12.30 Uhr

Themen: Richtungsableitung, Extrema, Satz von Taylor

Aufgabe 13 (K).

(a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ werde definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 < y < x^2\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie für f alle Richtungsableitungen im Nullpunkt, soweit sie existieren.

(b) Bestimmen Sie Lage, Art und Wert aller lokalen Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) \;=\; 3x - 3xy^2 + \frac{3}{2}x^2$$

Besitzt f ein globales Maximum bzw. Minimum?

Lösung 13

(a) Sei $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ eine Richtung, d. h. es gelte $a_1^2 + a_2^2 = 1$. Dann liefert die Definition der Richtungsableitung

$$\frac{\partial f}{\partial a}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+ta) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(ta_1, ta_2)}{t}\,,$$

denn $f(0,0) = 0$. Ist $a_1 = 0$ oder $a_2 = 0$, so gilt nach Definition $f(ta_1, ta_2) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Im Fall $a_1, a_2 \neq 0$ definiere $\varepsilon := \dfrac{|a_2|}{a_1^2} > 0$. Sei $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| < \varepsilon$, dann gilt entweder $ta_2 \leq 0$, also $f(ta_1, ta_2) = 0$, oder $ta_2 > 0$. In diesem Fall ist

$$ta_2 = |t| \cdot |a_2| = |t| \cdot \varepsilon a_1^2 > |t|^2 a_1^2 = (ta_1)^2,$$

also gilt auch hier $f(ta_1, ta_2) = 0$. Stets gilt also $f(ta_1, ta_2) = 0$, wenn $|t|$ hinreichend klein wird. Der obige Grenzwert ist daher 0, und das bedeutet, dass sämtliche Richtungsableitungen von f im Nullpunkt existieren und jeweils den Wert 0 haben.

(b) Siehe Scan.

Aufgabe 14 (K). Bestimmen Sie jeweils die Darstellung von $f(x_0 + h)$, die der Satz von Taylor für zweimal stetig partiell differenzierbare Funktionen liefert.

(a) $f(x,y) = \arctan(xy)\,, \quad x_0 = (1,1)$,

(b) $f(x,y,z) = xe^z - y^2\,, \quad x_0 = (1,-1,0)$.

Lösung 14

(a) Für jede Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ liefert der Satz von Taylor

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + h \cdot \mathrm{grad} f(x_0) + \tfrac{1}{2}\big(H_f(\xi)h\big) \cdot h \\ &= f(x_0) + f_x(x_0)h_1 + f_y(x_0)h_2 + \tfrac{1}{2} f_{xx}(\xi)h_1^2 + f_{xy}(\xi)h_1h_2 + \tfrac{1}{2} f_{yy}(\xi)h_2^2 \end{aligned}$$

mit einem $\xi \in S[x_0, x_0 + h]$. Wir bestimmen daher zunächst einige partielle Ableitungen:

$$f_x(x,y) = \frac{y}{1+(xy)^2}\,, \quad f_{xx}(x,y) = \frac{-2xy^3}{(1+(xy)^2)^2}\,, \quad f_{xy}(x,y) = \frac{(1+x^2y^2) - 2x^2y^2}{(1+(xy)^2)^2} = \frac{1-x^2y^2}{(1+(xy)^2)^2}\,.$$

Wegen $f(x, y) = f(y, x)$ ergeben sich daraus die anderen noch benötigten Ableitungen: Es gilt $f_y(x, y) = f_x(y, x)$ und $f_{yy}(x, y) = f_{xx}(y, x)$.

Mit $f(x_0) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ und $f_x(1, 1) = f_y(1, 1) = \frac{1}{2}$ erhalten wir also die Darstellung

$$f(x_0 + h) = \frac{\pi}{4} + \frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2} - \frac{\xi_1\xi_2^3\, h_1^2}{(1+\xi_1^2\xi_2^2)^2} + \frac{(1-\xi_1^2\xi_2^2)h_1h_2}{(1+\xi_1^2\xi_2^2)^2} - \frac{\xi_1^3\xi_2\, h_2^2}{(1+\xi_1^2\xi_2)^2}\,.$$

Bemerkung: Wählt man nun h sehr klein, betrachtet also $(x, y) := x_0 + h$ in der Nähe von $x_0 = (1, 1)$, so gilt $\xi \approx (1, 1)$ und damit

$$f(x,y) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2} + \frac{y-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{4}\,.$$

(b) Bei dieser Funktion aus $C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ ergeben sich die partiellen Ableitungen

$$f_x(x,y,z) = e^z\,, \qquad f_y(x,y,z) = -2y\,, \qquad f_z(x,y,z) = xe^z\,.$$

Damit erhalten wir $f_x(1, -1, 0) = 1$, $f_y(1, -1, 0) = 2$ und $f_z(1, -1, 0) = 1$. Weiter gilt

$$f_{xx} = 0\,, \quad f_{xy} = 0\,, \quad f_{xz}(x,y,z) = e^z\,, \quad f_{yy} = -2\,, \quad f_{yz} = 0\,, \quad f_{zz}(x,y,z) = xe^z\,.$$

Insgesamt haben wir also

$$f(x_0) = 0\,, \qquad \mathrm{grad} f(x_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad H_f(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{\xi_3} \\ 0 & -2 & 0 \\ e^{\xi_3} & 0 & \xi_1 e^{\xi_3} \end{pmatrix},$$

und gewinnen damit die Darstellung

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= 0 + h_1 + 2h_2 + h_3 + \tfrac{1}{2}\big(-2h_2^2 + \xi_1 e^{\xi_3} h_3^2 + 2e^{\xi_3} h_1 h_3\big) \\ &= h_1 + 2h_2 + h_3 - h_2^2 + \tfrac{1}{2}\xi_1 e^{\xi_3} h_3^2 + e^{\xi_3} h_1 h_3\,. \end{aligned}$$

Nahe $x_0 = (1, -1, 0)$ ergibt sich daraus die Näherung

$$f(x,y,z) \approx (x-1) + 2(y+1) + z - (y+1)^2 + \tfrac{1}{2} z^2 + (x-1)z\,.$$

Aufgabe 15.

(a) Bestimmen Sie alle Stellen lokaler Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, und entscheiden Sie, ob es sich dabei um Maxima oder Minima handelt.

(1) $f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$,

(2) $f(x,y) = x^4 + y^4 + 4xy - 2x^2 - 2y^2$.

(b) Sei A eine indefinite, symmetrische $(n \times n)$-Matrix.

(1) Zeigen Sie: Es existiert ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $(Ax) \cdot x = 0$ und $x \neq 0$.

(2) Bestimmen Sie für die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ein $x \in \mathbb{R}^2$ mit $(Ax) \cdot x = 0$ und $x \neq 0$.

Lösung 15

(a.1) Offenbar gilt jeweils $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, denn die Funktionen sind beliebig oft partiell differenzierbar. Man erhält also alle Kandidaten für Extremstellen durch Nullsetzen des Gradienten und kann sie dann mit Hilfe der Hessematrix genauer untersuchen.
Bei dieser Funktion gilt für die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} f_x &= 2xe^{-(x^2+y^2)} - 2x(x^2+2y^2)e^{-(x^2+y^2)} = (2x - 2x^3 - 4xy^2)e^{-(x^2+y^2)}\,, \\ f_y &= 4ye^{-(x^2+y^2)} - 2y(x^2+2y^2)e^{-(x^2+y^2)} = (4y - 2x^2y - 4y^3)e^{-(x^2+y^2)}\,. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Äquivalenzenkette

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f(x,y) = (0,0) &\iff 2x - 2x^3 - 4xy^2 = 0 \quad \text{und} \quad 4y - 2x^2y - 4y^3 \\ &\iff (x = 0 \text{ oder } 1 - x^2 - 2y^2 = 0) \quad \text{und} \quad (y = 0 \text{ oder } 2 - x^2 - 2y^2 = 0) \\ &\iff (x = y = 0) \text{ oder } (x = 0 \text{ und } 2 - 2y^2 = 0) \text{ oder } (1 - x^2 = 0 \text{ und } y = 0)\,. \end{aligned}$$

Als Stellen lokaler Extrema kommen also die Punkte $(0,0)$, $(0,\pm 1)$ und $(\pm 1, 0)$ in Frage.

Der Nullpunkt ist sehr einfach zu untersuchen: Wegen $f(0,0) = 0 < f(x,y)$ für alle $(x,y) \neq (0,0)$ hat f in $(0,0)$ offenbar ein globales Minimum.

Für die anderen Punkte bestimmen wir dagegen die Hessematrix; es gilt

$$\begin{aligned} f_{xx} &= (2 - 6x^2 - 4y^2)e^{-(x^2+y^2)} - 2xf_x\,, \\ f_{yy} &= (4 - 2x^2 - 12y^2)e^{-(x^2+y^2)} - 2yf_y \\ f_{xy} &= -8xye^{-(x^2+y^2)} - 2yf_x = f_{yx} = -4xye^{-(x^2+y^2)} - 2xf_y\,. \end{aligned}$$

Da an den Kandidaten für Extremstellen f_x und f_y verschwinden, erhalten wir

$$H_f(0,\pm 1) = \begin{pmatrix} f_{xx}(0,\pm 1) & f_{xy}(0,\pm 1) \\ f_{xy}(0,\pm 1) & f_{yy}(0,\pm 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & -8e^{-1} \end{pmatrix}.$$

Wegen $-2e^{-1} < 0$ und $\det H_f(0,\pm 1) = 16e^{-2} > 0$ ist diese Matrix negativ definit, daher hat f in den Punkten $(0,\pm 1)$ lokale Maxima; der Wert ist jeweils $f(0,\pm 1) = 2e^{-1}$.

Noch zwei Kandidaten für Extremstellen sind zu untersuchen: Es gilt

$$H_f(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} -4e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix},$$

und wegen $\det H_f(\pm 1, 0) = -8e^{-1} < 0$ ist diese (2×2)-Matrix indefinit. In den beiden Punkten $(\pm 1, 0)$ hat f folglich keine Extrema.

(a.2) Die notwendige Bedingung für Extremalstellen ist wiederum

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 + 4y - 4x \\ 4y^3 + 4x - 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Addieren wir die beiden Gleichungen $f_x = 0$ und $f_y = 0$, so ergibt sich die Bedingung

$$4x^3 + 4y^3 = 0\,, \qquad \text{also} \qquad 4(x+y)(x^2 - xy + y^2) = 0\,.$$

Dies ist zum einen für $x+y=0$, also $y=-x$ erfüllt. In $f_x = 0$ eingesetzt ergibt sich dann $4x^3 - 8x = 0$, also $x = 0$ oder $x^2 = 2$.
Zum anderen könnte $x^2 - xy + y^2 = 0$ gelten; wegen $x^2 - xy + y^2 = (x - \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2$ ist dies jedoch nur für $x = y = 0$ der Fall.
Wir haben damit drei Kandidaten für Extremstellen gefunden, nämlich

$$(0,0)\,, \qquad (\sqrt{2}, -\sqrt{2}\,) \qquad \text{und} \qquad (-\sqrt{2}, \sqrt{2}\,)\,.$$

Um festzustellen, ob hier Extrema vorliegen, verwenden wir wieder die Hessematrix. Es gilt $f_{xx} = 12x^2 - 4$, $f_{xy} = 4$ und $f_{yy} = 12y^2 - 4$. Also ist

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}, \qquad \text{d. h.} \qquad H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\det H_f(0,0) = 0$ ist diese $(2,2)$-Matrix weder positiv definit, noch negativ definit, noch indefinit; die Hessematrix liefert also keine Entscheidung. Betrachten wir jedoch

$$f(x,x) = 2x^4 > 0 \;\text{ für } x \neq 0\,, \quad f(x,0) = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2-2) < 0 \;\text{ für } 0 < x < \sqrt{2}\,,$$

so sehen wir: In jeder Umgebung von $(0,0)$ gibt es Punkte (x,y) mit $f(x,y) > 0 = f(0,0)$ und auch solche mit $f(x,y) < 0 = f(0,0)$. In $(0,0)$ liegt also kein Extremum vor.

Bei den weiteren Punkten ist die Hessematrix wieder von Nutzen: Wir haben

$$H_f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\,) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix},$$

und wegen $f_{xx}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\,) = 20 > 0$ und $\det H_f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\,) = 384 > 0$ ist diese Matrix positiv definit. Folglich besitzt f an dieser Stelle ein lokales Minimum.
Wegen $H_f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\,) = H_f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\,)$ hat f auch in $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\,)$ ein lokales Minimum.

(b.1) Siehe Scan.

(b.2) Siehe Scan.

$$f_x = 3 - 3y^2 + 3x \,, \quad f_y = -6xy$$

$$f_{xx} = 3 \,, \quad f_{xy} = f_{yx} = -6y \,, \quad f_{yy} = -6x$$

Notwendige Bed.: $\operatorname{grad} f(x,y) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 3y^2 + 3x = 0 & (\mathrm{I}) \\ -6xy = 0 & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

$\underset{(\mathrm{II})}{\Rightarrow}$ $x = 0$ oder $y = 0$ (beide 0 geht nicht wegen (I))

$\underline{x=0} \Rightarrow 3 - 3y^2 = 0 \Rightarrow y = \pm 1$

$\underline{y=0} \Rightarrow 3 + 3x = 0 \Rightarrow x = -1$

Kritische Stellen: $(0,1)$, $(0,-1)$, $(-1,0)$

Hinreichende Bed.:

Hessematrix $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 3 & -6y \\ -6y & -6x \end{pmatrix}$

- $H_f(0,1) = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$, $\det H_f(0,1) = -36 < 0$

  $\Rightarrow H_f(0,1)$ indefinit $\Rightarrow$ kein Extremum in $(0,1)$.

- $H_f(0,-1) = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$, $\det H_f(0,-1) = -36 < 0$

  $\Rightarrow H_f(0,-1)$ indefinit $\Rightarrow$ kein Extremum in $(0,-1)$.

- $H_f(-1,0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow$ alle Eigenwerte von $H_f(-1,0)$ positiv $\Rightarrow H_f(-1,0)$ pos. def.

  $\Rightarrow$ in $(-1,0)$ liegt lokales Min. mit dem Wert $f(-1,0) = -\frac{3}{2}$ vor.

Figure 1: Aufgabe 13 (b)

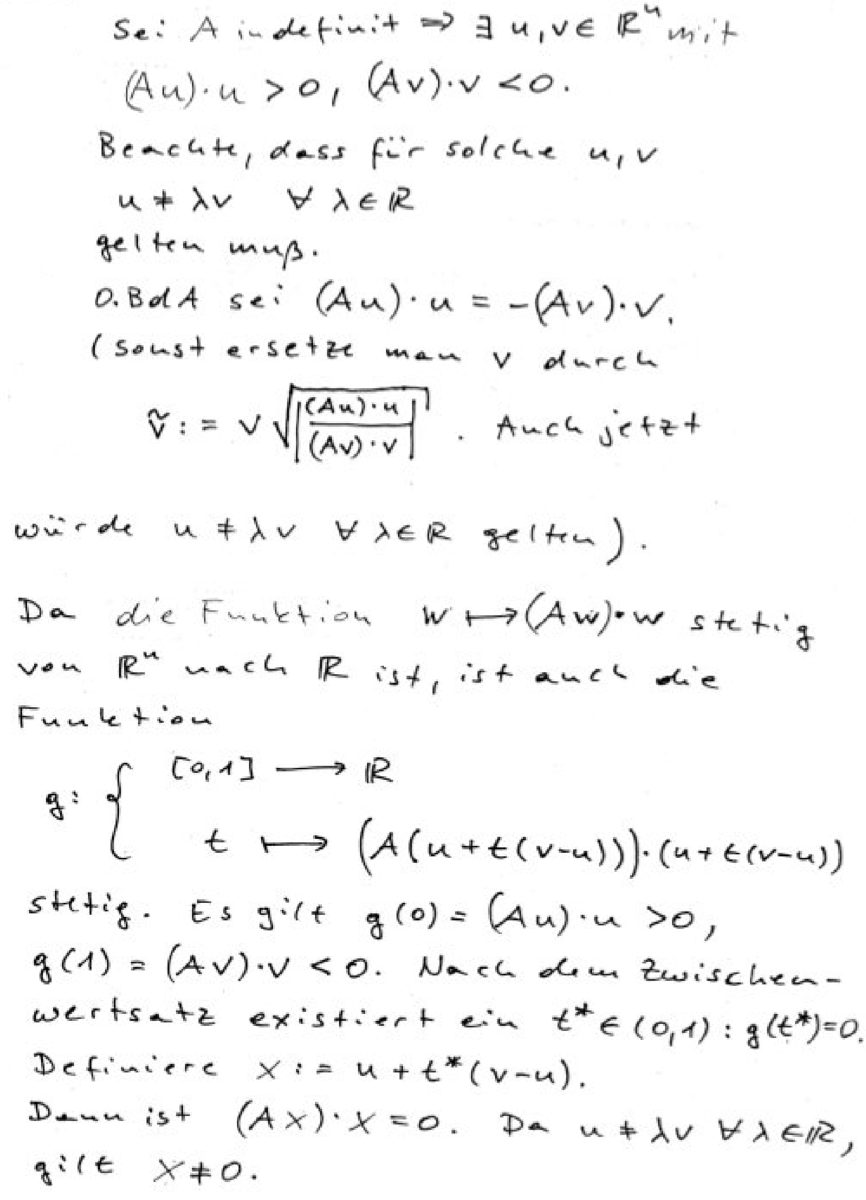
Es ex. kein globales Min., denn

$$f(1,y) = 3 - 3y^2 + \frac{3}{2} \xrightarrow[y \to \infty]{} -\infty.$$

Es ex. auch kein globales Max., denn

$$f(x,0) = 3x + \frac{3}{2}x^2 \xrightarrow[x \to \infty]{} +\infty.$$

Figure 2: Aufgabe 13 (b)



Sei A indefinit $\Rightarrow \exists\, u, v \in \mathbb{R}^n$ mit
$(Au)\cdot u > 0$, $(Av)\cdot v < 0$.

Beachte, dass für solche u, v
$u \neq \lambda v \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
gelten muß.

O.BdA sei $(Au)\cdot u = -(Av)\cdot v$.
(sonst ersetze man v durch
$\tilde{v} := v \sqrt{\left|\frac{(Au)\cdot u}{(Av)\cdot v}\right|}$. Auch jetzt
würde $u \neq \lambda v \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ gelten).

Da die Funktion $w \mapsto (Aw)\cdot w$ stetig von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$ ist, ist auch die Funktion

$$g: \begin{cases} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \big(A(u+t(v-u))\big)\cdot(u+t(v-u)) \end{cases}$$

stetig. Es gilt $g(0) = (Au)\cdot u > 0$,
$g(1) = (Av)\cdot v < 0$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $t^* \in (0,1): g(t^*) = 0$.
Definiere $x := u + t^*(v-u)$.
Dann ist $(Ax)\cdot x = 0$. Da $u \neq \lambda v \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$,
gilt $x \neq 0$.

Figure 3: Aufgabe 15 (b.1)

(b) Setze $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (Au)\cdot u > 0,\ (Az)\cdot z < 0.$

$$v = z \cdot \sqrt{\left| \frac{(Au)\cdot u}{(Az)\cdot z} \right|} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{|-1|}} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Die Funktion g lautet in diesem Fall:

$$g(t) = 3 - 6(1+\sqrt{3})t + 6\sqrt{3}t^2.$$

Die Nullstelle von g die zw. 0 und 1 liegt lautet $t^* = \frac{1}{6}(3-\sqrt{3})$

Der Vektor x lautet damit

$$x := u + t^*(v-u) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Anmerkung: Es gilt auch für alle $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $(A(\lambda x))\cdot(\lambda x) = 0.$

Figure 4: Aufgabe 15 (b.2)