Karlsruher Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2013
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Dr. Andreas Helfrich-Schkarbanenko

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

6. Übungsblatt Abgabe bis Freitag, 31.5.2013, 12.30 Uhr

Themen: Kettenregel, Jacobi-Matrix, Implizit definierte Funktionen

Aufgabe 16 (K). Die Funktionen $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ seien gegeben durch

$$f(x,y) := \big(x^2, y^2\big)\,, \qquad g(x,y) := \big(\sin(xy), e^{x+y}\big)\,, \qquad h(x,y) := \big(e^x \cos y, \sinh x\big)\,.$$

Berechnen Sie die Ableitungen von f, g und h, und ermitteln Sie dann mit Hilfe der Kettenregel die Ableitungen der Funktionen $g \circ f$ und $h \circ g$.

Lösung 16 Offensichtlich besitzen alle drei Funktionen stetige partielle Ableitungen und sind damit differenzierbar. Nach Def 19.1 heißt $J_f(x,y) =: f'(x,y)$ die Ableitung von f in (x,y) für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Beachte, dass der Definitionsbereich von sinh ganz $\mathbb{R}$ ist.

Für f mit den Komponentenfunktionen $f_1(x,y) := x^2$ und $f_2(x,y) := y^2$ erhält man die Jacobi- oder Funktionalmatrix in (x,y)

$$f'(x,y) = \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x,y)} = J_f(x,y) = \begin{pmatrix} (f_1)_x & (f_1)_y \\ (f_2)_x & (f_2)_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}\,,$$

und ebenso ergibt sich

$$g'(x,y) = J_g(x,y) = \begin{pmatrix} y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad h'(x,y) = J_h(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ \cosh x & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Mit Hilfe der Kettenregel kommen wir dann auf

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(x,y) = g'\big(f(x,y)\big) \cdot f'(x,y) &= \begin{pmatrix} y^2\cos(x^2y^2) & x^2\cos(x^2y^2) \\ e^{x^2+y^2} & e^{x^2+y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2xy^2\cos(x^2y^2) & 2x^2y\cos(x^2y^2) \\ 2xe^{x^2+y^2} & 2ye^{x^2+y^2} \end{pmatrix}\,.\end{aligned}$$

Für die Funktion $h \circ g$ erhält man

$$\begin{aligned}(h \circ g)'(x,y) &= h'\big(g(x,y)\big) \cdot g'(x,y) \\ &= \begin{pmatrix} e^{\sin(xy)}\cos(e^{x+y}) & -e^{\sin(xy)}\sin(e^{x+y}) \\ \cosh(\sin(xy)) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix}\,,\end{aligned}$$

und Ausmultiplizieren liefert für $(h \circ g)'(x,y)$ die Matrix

$$e^{\sin(xy)} \begin{pmatrix} y\cos(xy)\cos(e^{x+y}) - e^{x+y}\sin(e^{x+y}) & x\cos(xy)\cos(e^{x+y}) - e^{x+y}\sin(e^{x+y}) \\ ye^{-\sin(xy)}\cos(xy)\cosh(\sin(xy)) & xe^{-\sin(xy)}\cos(xy)\cosh(\sin(xy)) \end{pmatrix}\,.$$

Den Faktor $e^{\sin(xy)}$ haben wir dabei aus Platzgründen vor die Matrix gezogen.

Aufgabe 17 (K).

(a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) := \begin{pmatrix} \cos x_1 + x_2 - y_1^2 - y_2^2 \\ x_1 - \sin(\pi x_2) - y_1^2 + y_2^2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass durch die Gleichung $f(x_1, x_2, y_1, y_2) = (0, 0)$ in einer gewissen Umgebung U von $(0, 1)$ eine Funktion g mit $g(0, 1) = (1, 1)$ und

$$f\big(x_1, x_2, g(x_1, x_2)\big) = (0, 0) \qquad \text{für alle } (x_1, x_2) \in U$$

implizit definiert wird, und berechnen Sie die Ableitung $g'(0, 1)$.

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$z^3 + 2z^2 - 3xyz + x^3 - y^3 = 0$$

in einer Umgebung von $(0, 0, -2)$ nach z aufgelöst werden kann. Geben Sie für die dadurch implizit definierte Funktion $g(x, y)$ die Ableitung g' in einer Umgebung von $(0, 0)$ als Funktion von x, y und $g(x, y)$ an.

Lösung 17

(a) Offenbar ist die Funktion f als Komposition stetig differezierbaren Funktionen in $\mathbb{R}^4$ stetig differenzierbar. Folglich liefert der Satz über implizit definierte Funktionen die Behauptung, wenn

$$f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \det\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \neq 0$$

für die Punkte $x_0 := (0, 1)$ und $y_0 := (1, 1)$ gilt.

- Nun ist in der Tat

$$f(0, 1, 1, 1) = \begin{pmatrix} \cos 0 + 1 - 1^2 - 1^2 \\ 0 - \sin\pi - 1^2 + 1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Und für die Ableitung bezüglich der Variablen, nach denen wir auflösen wollen, gilt

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, y_1, y_2)}{\partial(y_1, y_2)} = \begin{pmatrix} -2y_1 & -2y_2 \\ -2y_1 & 2y_2 \end{pmatrix}, \qquad \text{also} \qquad \frac{\partial f(0, 1, 1, 1)}{\partial(y_1, y_2)} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

  Diese Matrix hat Determinante $-4 - 4 = -8 \neq 0$.

Mit dem Satz über implizit definierte Funktionen folgt also die Behauptung und zudem

$$g'(x_0) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Bei einer invertierbaren (2×2)-Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ gilt $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$, wie man leicht nachrechnet. Also hat man

$$\left(\frac{\partial f(0, 1, 1, 1)}{\partial(y_1, y_2)}\right)^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Für die Ableitung nach x_1 und x_2 ergibt sich

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} -\sin x_1 & 1 \\ 1 & -\pi\cos(\pi x_2) \end{pmatrix}, \qquad \text{also} \qquad \frac{\partial f(0, 1, 1, 1)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \pi \end{pmatrix},$$

und damit erhalten wir schließlich

$$g'(0, 1) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \pi \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 2 + 2\pi \\ -2 & 2 - 2\pi \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 + \pi \\ -1 & 1 - \pi \end{pmatrix}.$$

(b) Wieder folgt die behauptete Auflösbarkeit mit dem Satz über implizite Funktionen, wenn wir

$$f(0,0,-2) = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,-2) \neq 0$$

für die stetig differenzierbare Funktion $f(x,y,z) := z^3 + 2z^2 - 3xyz + x^3 - y^3$ überprüft haben. Es gilt $f(0,0,-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 = 0$ und

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3z^2 + 4z - 3xy\,, \qquad \text{also} \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,-2) = 3(-2)^2 + 4(-2) = 4 \neq 0\,,$$

womit die Behauptung bereits bewiesen ist. Für die Ableitung gilt

$$\begin{aligned} g'(x,y) &= -\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,g(x,y))\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial(x,y)}(x,y,g(x,y)) \\ &= -\frac{1}{3g(x,y)^2 + 4g(x,y) - 3xy}\begin{pmatrix}-3yg(x,y) + 3x^2 & -3xg(x,y) - 3y^2\end{pmatrix}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 18.

(a) Sei $f(x,y,z) = x^3 - 2yz^2$. Zeigen Sie, dass eine offene Umgebung U von $(2,1)$ und genau eine Funktion $g \in C^1(U,\mathbb{R})$ mit $f(x,y,g(x,y)) = 0$ und $g(2,1) = 2$ existiert. Berechnen Sie $g'(2,1)$.

(b) Sei

$$f(x_1,x_2,y_1,y_2) = \begin{pmatrix}\cos(\pi x_1 + y_1) + x_2^2 - y_2^5 \\ x_1 x_2 - e^{y_1} - \cos(\pi y_2)\end{pmatrix}$$

für $(x_1,x_2,y_1,y_2) \in \mathbb{R}^4$. Zeigen Sie, dass eine offene Umgebung U von $(x,y) = (-1,0)$ und genau eine Funktion $g \in C^1(U,\mathbb{R}^2)$ mit $f(x,y,g(x,y)) = 0$ und $g(-1,0) = (0,-1)$ existiert. Berechnen Sie $g'(-1,0)$.

Lösung 18

(a) f ist stetig differenzierbar. Es gilt $f(2,1,2) = 0$ sowie $f_z(x,y,z) = -4yz$ und daher $f_z(2,1,2) = -8 \neq 0$. Nach dem Satz über implizit definierte Funktionen existiert eine Umgebung U und genau eine Funktion g wie gefordert. Zudem

$$\begin{aligned} g'(2,1) &= -\left(\frac{\partial f}{\partial z}(2,1,g(2,1))\right)^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial(x,y)}(2,1,g(2,1)) \\ &= -(-8)^{-1} \cdot (3x^2, -2z^2)\big|_{(x,y)=(2,1)} \\ &= \frac{1}{8}(12,-8) \\ &= (\frac{3}{2}, -1). \end{aligned}$$

Hinweis: In dieser einfachen Situation $(x^3 - 2yg^2(x,y) = 0)$ lässt sich die Funktion g sogar explizit angeben, nämlich $g(x,y) = \sqrt{\frac{x^2}{2y}}$. Als offene Umgebung ist hier $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$ wählbar.

(b) f ist stetig differenzierbar. Es gilt $f(-1,0,0,-1) = (0,0)^\top$ sowie

$$f_x(x_1,x_2,y_1,y_2) = \begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\pi\sin(\pi x_1 + y_1) & 2x_2 \\ x_2 & x_1\end{pmatrix}, \qquad f_y(x_1,x_2,y_1,y_2) = \begin{pmatrix}0 & -5y_2^4 \\ e^{y_1} & \pi\sin(\pi y_2)\end{pmatrix}$$

und daher

$$\det(f_y(-1,0,0,-1)) = \det\begin{pmatrix}0 & -5 \\ 1 & 0\end{pmatrix} = 5 \neq 0.$$

Nach dem Satz über implizit definierte Funktionen existiert eine Umgebung U und genau eine Funktion g wie gefordert. Zudem

$$\begin{aligned} g'(-1,0) &= -f_y(-1,0,g(-1,0))^{-1} \cdot f_x(-1,0,g(-1,0)) \\ &= -f_y(-1,0,0,-1)^{-1} \cdot f_x(-1,0,0,-1) \\ &= -\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Prüfungsankündigung:
Höhere Mathematik I/II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik
(Diplomvorprüfung bzw. Bachelor Modulprüfung)

Herbst 2013

Termine

- **Diplomvorprüfung**
  Höhere Mathematik I/II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik:

  11. September 2013, 8-10 Uhr (Teil 1) und 11-13 Uhr (Teil 2)

- **Bachelor Modulprüfung**
  Höhere Mathematik I/II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik:

  11. September 2013, 8-10 Uhr (Teil 1) und 11-13 Uhr (Teil 2)

Anmeldung

- Für die **Diplomvorprüfung** im Zimmer 3A-26.1, Allianzgebäude bei Frau Ewald. Zur Anmeldung ist die Zulassung vom Prüfungsamt (Studienbüro) mitzubringen!
- Für die **Bachelor Modulprüfung** über QISPOS unter https://studium.kit.edu
- Für alle oben genannten Prüfungen gilt der **Anmeldeschluss**

10. August 2013.

Hörsaaleinteilung

Die Hörsaaleinteilung wird unter http://www.math.kit.edu/iana3/~schmoeger/seite/einteilung/de rechtzeitig bekannt gegeben!