Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Dr. Andreas Helfrich-Schkarbanenko

Sommersemester 2013

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

7. Übungsblatt Abgabe bis Freitag, 7.6.2013, 12.30 Uhr

Themen: Umkehrsatz, Satz von Fubini

Aufgabe 19 (K).

(a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$f(x,y) \;:=\; \begin{pmatrix} \cosh(x)\cos(y) \\ \sinh(x)\sin(y) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: Es gibt eine Umgebung U von $(\log 2, \frac{\pi}{2})$ und eine Umgebung V von $(0, \frac{3}{4})$ so, dass U durch die Funktion f bijektiv auf V abgebildet wird. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion $\left(f|_U\right)^{-1}$ in $(0, \frac{3}{4})$.

(b) Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x > 0$ lokal invertierbar ist. Zeigen Sie, dass f auf $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ nicht injektiv ist.

Lösung 19

(a) Der Umkehrsatz liefert die Behauptung, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Die Funktion f ist stetig differenzierbar.
- Es gilt $f(\log 2, \frac{\pi}{2}) = (0, \frac{3}{4})$.
- Die Matrix $f'(\log 2, \frac{\pi}{2})$ ist invertierbar.

Überprüfen wir diese Voraussetzungen: Die stetige Differenzierbarkeit ist offensichtlich. Weiter ist

$$f(\log 2, \tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} \cosh(\log 2)\cos\frac{\pi}{2} \\ \sinh(\log 2)\sin\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sinh(\log 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/4 \end{pmatrix},$$

denn $\sinh(\log 2) = \frac{1}{2}(e^{\log 2} - e^{-\log 2}) = \frac{1}{2}(2 - \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$, und für die Ableitung von f gilt

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \sinh x \cos y & -\cosh x \sin y \\ \cosh x \sin y & \sinh x \cos y \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$f'(\log 2, \tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -\cosh(\log 2) \\ \cosh(\log 2) & 0 \end{pmatrix}$$

invertierbar, denn $\cosh(\log 2) = \frac{1}{2}(2 + \frac{1}{2}) = \frac{5}{4} \neq 0$. Nach dem Umkehrsatz gilt zudem

$$(f^{-1})'(0, \tfrac{3}{4}) = \left(f'(\ln 2, \tfrac{\pi}{2})\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -5/4 \\ 5/4 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 4/5 \\ -4/5 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) In jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x > 0$ gilt $\sinh(x), \cosh(x) > 0$ und damit

$$\det(f'(x,y)) = \sinh^2(x)\cos^2(y) + \cosh^2(x)\sin^2(y) > 0,$$

denn die Gleichung $\cos^2(y) = \sin^2(y) = 0$ hat keine Lösung. Nach dem lokalen Umkerhsatz ist f in einer Umgebung von (x, y) injektiv. Die Funktion ist hingegen nicht auf $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ injektiv, denn für alle $x > 0$ und $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$f(x, 2k\pi) = (\cosh(x) \cdot 1, \sinh(x) \cdot 0) = (\cosh(x), 0).$$

Aufgabe 20 (K). Berechnen Sie folgende Integrale auf den jeweils gegebenen Intervallen.

(a) $I = [0, 1] \times [-1, 2], \quad \int_I 3x^2 + xy + y^2 \, d(x, y)$

(b) $I = [0, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, 2\pi], \quad \int_I y \sin(x) + x \sin(y) \, d(x, y)$

(c) $I = [1, 2] \times [2, 3] \times [0, 2], \quad \int_I \frac{2z}{(x+y)^2} \, d(x, y, z)$

(d) $I = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1], \quad \int_I \frac{x^2 z^3}{1+y^2} \, d(x, y, z)$

Lösung 20

(a)

$$\begin{aligned}
\int_I (3x^2 + xy + y^2) \, d(x, y) &= \int_0^1 \int_{-1}^2 (3x^2 + xy + y^2) \, dy \, dx \\
&= \int_0^1 [3x^2 y + \frac{1}{2} x y^2 + \frac{1}{3} y^3]_{-1}^2 \, dx \\
&= \int_0^1 (9x^2 + \frac{3}{2} x + 3) \, dx \\
&= 3 + \frac{3}{4} + 3 \\
&= \frac{27}{4}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\int_I y \sin(x) + x \sin(y) \, d(x, y) &= \int_0^\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{2\pi} (y \sin(x) + x \sin(y)) \, dy \, dx \\
&= \int_0^\pi \big[\frac{1}{2} \sin(x) y^2 - x \cos(y)\big]_{-\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \, dx \\
&= \int_0^\pi (\frac{15\pi^2}{8} \sin(x) - x) \, dx \\
&= \frac{15}{4} \pi^2 - \frac{1}{2} \pi^2 \\
&= \frac{13}{4} \pi^2
\end{aligned}$$

(c)

$$
\begin{aligned}
\int_I \frac{2z}{(x+y)^2}\, d(x,y,z) &= \int_1^2 \int_2^3 \int_0^2 \frac{2z}{(x+y)^2}\, dz\, dy\, dx \\
&= \int_1^2 \int_2^3 \frac{4}{(x+y)^2}\, dy\, dx \\
&= \int_1^2 \big[-\frac{4}{x+y}\big]_2^3\, dx \\
&= \int_1^2 (-\frac{4}{x+3} + \frac{4}{x+2})\, dx \\
&= \big[-4\log(x+3) + 4\log(x+2)\big]_1^2 \\
&= -4\log(5) + 4\log(4) + 4\log(4) - 4\log(3) \\
&= 4\log(\frac{16}{15})
\end{aligned}
$$

(d)

$$
\begin{aligned}
\int_I \frac{x^2 z^3}{1+y^2}\, d(x,y,z) &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 z^3}{1+y^2}\, dz\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2}{4(1+y^2)}\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 \big[\frac{x^2}{4} \arctan(y)\big]_0^1\, dx \\
&= \frac{\pi}{16} \int_0^1 x^2\, dx \\
&= \frac{\pi}{48}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 21.

(a) Die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch $g(x,y) := (x+y, x^2)$. Bestimmen Sie alle Punkte, zu denen eine Umgebung existiert, auf der g injektiv ist, und geben Sie die Umkehrabbildung jeweils konkret an.

(b) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$
\text{(i)} \int_{[0,1]\times[0,1]} (xy + y^2)\, d(x,y), \qquad \text{(ii)} \int_{[-1,0]\times[0,2]} \cosh(2x+y)\, d(x,y).
$$

Berechnen Sie für (ii) sowohl $\int_{[0,2]} \left(\int_{[-1,0]} \cosh(2x+y)\, dx\right) dy$, als auch $\int_{[-1,0]} \left(\int_{[0,2]} \cosh(2x+y)\, dy\right) dx$.

Lösung 21

(a) Die Funktion g ist offenbar stetig differenzierbar. Für die Ableitung gilt

$$
g'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 0 \end{pmatrix},
$$

d. h. $\det g'(x,y) = -2x$. Mit dem Umkehrsatz folgt daher, dass g in einer Umgebung von (x_0, y_0) injektiv ist, wenn $x_0 \neq 0$ gilt. Für Punkte $(0, y_0)$ ist damit allerdings noch nicht bewiesen, dass g dort *nicht* lokal umkehrbar ist. Wegen

$$
g(\epsilon, y_0 - \epsilon) = (y_0, \epsilon^2) = g(-\epsilon, y_0 + \epsilon)
$$

für jedes $\epsilon > 0$ ist g aber tatsächlich in keiner Umgebung von $(0, y_0)$ injektiv.

Jetzt betrachten wir $x_0 \neq 0$ und wollen in der Nähe von $(u_0, v_0) := g(x_0, y_0)$ die Umkehrfunktion bilden; wir müssen also die Gleichungen

$$u = x + y \qquad \text{und} \qquad v = x^2$$

nach x und y auflösen. Offenbar liefert dies im Falle $x_0 > 0$

$$x = \sqrt{v} \qquad \text{und} \qquad y = u - \sqrt{v}\,,$$

im Falle $x_0 < 0$ aber

$$x = -\sqrt{v} \qquad \text{und} \qquad y = u + \sqrt{v}\,.$$

Die Umkehrabbildung lautet mithin in einer Umgebung von $g(x_0, y_0) = (u_0, v_0)$

$$g^{-1}(u, v) = \left(\sqrt{v}\,, u - \sqrt{v}\,\right), \qquad \text{falls } x_0 > 0\,,$$

bzw.

$$g^{-1}(u, v) = \left(-\sqrt{v}\,, u + \sqrt{v}\,\right), \qquad \text{falls } x_0 < 0\,.$$

(b.i) Offenbar ist der Integrand jeweils eine stetige Funktion; wir können daher die Integrale mit Hilfe des Satzes von Fubini berechnen. Der Satz von Fubini liefert

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]\times[0,1]} (xy + y^2)\, d(x, y) &= \int_0^1 \left(\int_0^1 (xy + y^2)\, dy\right) dx = \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}xy^2 + \tfrac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \int_0^1 \left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}\right) dx = \left[\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{3}x\right]_{x=0}^{x=1} = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{7}{12}\,.\end{aligned}$$

(b.ii) Diesmal ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_{[-1,0]\times[0,2]} \cosh(2x + y)\, d(x, y) &= \int_{-1}^0 \int_0^2 \cosh(2x + y)\, dy\, dx = \int_{-1}^0 \big[\sinh(2x + y)\big]_{y=0}^{y=2} dx \\ &= \int_{-1}^0 \big(\sinh(2x + 2) - \sinh(2x)\big)\, dx = \left[\tfrac{1}{2}\cosh(2x + 2) - \tfrac{1}{2}\cosh(2x)\right]_{x=-1}^{x=0} \\ &= \left(\tfrac{1}{2}\cosh 2 - \tfrac{1}{2}\cosh 0\right) - \left(\tfrac{1}{2}\cosh 0 - \tfrac{1}{2}\cosh(-2)\right) = \cosh 2 - 1\,.\end{aligned}$$

Rechnet man den hyperbolischen Cosinus noch aus, so erhält man $\frac{1}{2}(e^2 + e^{-2}) - 1$.