Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Dr. Andreas Helfrich-Schkarbanenko

Sommersemester 2013

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik
8. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 14.6.2013, 12.30 Uhr
Themen: Integration, Normalbereich, Satz von Fubini, Prinzip von Cavalieri

Aufgabe 22 (K). Sei B Normalbereich sowohl bezüglich der x- als auch der y-Achse, i.e. es existieren Intervalle $[a,b], [c,d] \subseteq \mathbb{R}$ sowie stetige Funktionen $\phi_1, \phi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\psi_1, \psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{aligned} B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [a,b],\ y \in [\phi_1(x), \phi_2(x)]\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \in [c,d],\ x \in [\psi_1(y), \psi_2(y)]\}. \end{aligned}$$

Sei ferner $f : B \to \mathbb{R}$ stetig. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass der Satz über die Vertauschung der Integrationsreihenfolge gilt:

$$\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\ dy\ dx = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\ dx\ dy. \qquad (*)$$

Bestimmen Sie in den nachfolgenden Integrationen die Funktionen $\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2$ auf entsprechenden Intervallen und vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge gemäß $(*)$. f sei dabei eine stetige Funktion.

(i) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\ dy\ dx$ $\qquad$ (ii) $\displaystyle\int_1^4 \int_{\sqrt{x}}^2 f(x,y)\ dy\ dx$

(iii) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin y} f(x,y)\ dx\ dy$ $\qquad$ (iv) $\displaystyle\int_0^1 \int_{1-y^2}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\ dx\ dy$

Lösung 22 **Aufgabe 23 (K)**.

(a) Skizzieren Sie die Menge $B \subseteq \mathbb{R}^2$ bzw. $C \subseteq \mathbb{R}^3$ und berechnen Sie deren Flächeninhalt bzw. deren Volumen. *Hinweis:* Prinzip von Cavalieri.

(a.1) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \frac{1}{4}x^2 - 1 \le y \le 2 - x\}$

(a.2) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ r^2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\} \quad (0 < r < R)$

(b) Skizzieren Sie die Integrationsbereiche der folgenden Integrale und berechnen Sie deren Wert. *Hinweis:* Satz von Fubini.

(b.1) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \in [0,1], y \le x \le 1\}$, $\displaystyle\int_D e^{x^2}\ d(x,y)$

(b.2) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \in [0,1], y \le x \le y^2 + 1\}$, $\displaystyle\int_D x^2 y\ d(x,y)$

Lösung 23

(i) $\phi_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\phi_1(x) \equiv 0$
$\phi_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\phi_2(x) = x$
$\psi_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\psi_1(y) = y$
$\psi_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\psi_2(y) \equiv 1$

$$\Rightarrow \int_0^1 \int_0^x f(x,y)\, dy\, dx = \int_0^1 \int_y^1 f(x,y)\, dx\, dy$$

(ii) $\phi_1 : [1,4] \to \mathbb{R}$, $\phi_1(x) = \sqrt{x}$
$\phi_2 : [1,4] \to \mathbb{R}$, $\phi_2(x) \equiv 2$
$\psi_1 : [1,2] \to \mathbb{R}$, $\psi_1(y) \equiv 1$
$\psi_2 : [1,2] \to \mathbb{R}$, $\psi_2(y) = y^2$

$$\Rightarrow \int_1^4 \int_{\sqrt{x}}^2 f(x,y)\, dy\, dx = \int_1^2 \int_1^{y^2} f(x,y)\, dx\, dy$$

(iii) $\psi_1 : [0,\pi/2] \to \mathbb{R}$, $\psi_1(y) \equiv 0$
$\psi_2 : [0,\pi/2] \to \mathbb{R}$, $\psi_2(y) = \sin y$
$\phi_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\phi_1(x) = \arcsin x$
$\phi_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\phi_2(x) \equiv \pi/2$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin y} f(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_{\arcsin x}^{\pi/2} f(x,y)\, dy\, dx$$

(iv) $\psi_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\psi_1(y) = 1-y^2$
$\psi_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\psi_2(y) = \sqrt{1-y^2}$
$\phi_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\phi_1(x) = \sqrt{1-x}$
$\phi_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\phi_2(x) = \sqrt{1-x^2}$

$$\Rightarrow \int_0^1 \int_{1-y^2}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_{\sqrt{1-x}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\, dy\, dx$$

(a.1) Für $x \in \mathbb{R}$ sei

$$B_x := \{y \in \mathbb{R} : (x,y) \in B\} = \begin{cases} \emptyset & , x \notin [-6,2] \\ [\frac{1}{4}x^2 - 1, 2 - x] & , x \in [-6,2] \end{cases}.$$

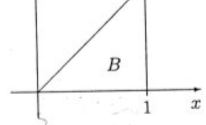
Nach dem Prinzip von Cavalieri folgt

$$|B| = \int_{-6}^{2} |B_x|\, dx = \int_{-6}^{2} (2 - x - \frac{1}{4}x^2 + 1)\, dx = \big[3x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^3)\big]_{-6}^{2} = \frac{64}{3}.$$

(a.2) Es gilt $C = \overline{B_R(0)} \setminus B_r(0)$ und $B_r(0) \subset B_R(0)$, also

$$|C| = |\overline{B_R(0)}| - |B_\zeta(0)| = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi \zeta^3 = \frac{4}{3}\pi (R^3 - \zeta^3)$$

(b.1) .



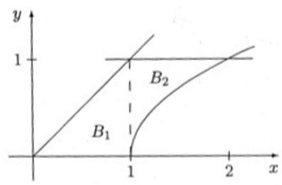
Es gilt nach dem Satz von Fubini

$$\int_D e^{x^2} d(x,y) = \int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^x e^{x^2}\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^x dy\, e^{x^2}\, dx = \int_0^1 x e^{x^2}\, dx = \left[\tfrac{1}{2} e^{x^2}\right]_0^1 = \tfrac{e-1}{2}.$$

Bemerkung: Hier ist das innere Integral $\int_y^1 e^{x^2}\, dx$ nicht explizit berechenbar. Für die Bestimmung eines iterierten Integrals kann also die Integrationsreihenfolge wesentlich sein.

(b.2) Für alle $y \in [0,1]$ gilt $y \leq y^2+1$. Es folgt nach Fubini

$$\begin{aligned}\int_B x^2 y \, d(x,y) &= \int_0^1 \int_y^{y^2+1} x^2 y \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 y \cdot \frac{1}{3}((y^2+1)^3 - y^3) \, dy \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 (y^7 + 3y^5 + 3y^3 + y - y^4) \, dy \\ &= \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{8} + \frac{3}{6} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5}) \\ &= \frac{67}{120}.\end{aligned}$$



Aufgabe 24.

(a) Skizzieren Sie die Menge $B \subseteq \mathbb{R}^2$ bzw. $C \subseteq \mathbb{R}^3$ und berechnen Sie deren Flächeninhalt bzw. deren Volumen. *Hinweis:* Prinzip von Cavalieri.

(a.1) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \geq 0, \; y^2 \leq x \leq 4 - y^2\}$
(a.2) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; \sqrt{x^2+y^2} \leq 1 - z, \; 0 \leq z \leq 1\}$

(b) Skizzieren Sie die Integrationsbereiche der folgenden Integrale und berechnen Sie deren Wert. *Hinweis:* Satz von Fubini.

(b.1) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x, y \geq 0, \; x^2+y^2 \leq z \leq 2\}$, $\displaystyle\int_D x \; d(x,y,z)$
(b.2) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x \leq 1 \;, y \geq 0, \; y \leq x, 0 \leq z \leq 1\}$, $\displaystyle\int_D \frac{\sin x}{x} \; d(x,y,z)$

Lösung 24

(a.1) Für $y \in \mathbb{R}$ sei

$$B_y := \{x \in \mathbb{R} : (x,y) \in B\} = \begin{cases} \emptyset & , y \notin [0, \sqrt{2}] \\ [y^2, 4-y^2] & , y \in [0, \sqrt{2}] \end{cases}.$$

Nach dem Prinzip von Cavalieri folgt

$$|B| = \int_0^{\sqrt{2}} |B_y| \, dy = \int_0^{\sqrt{2}} (4 - 2y^2) \, dy = \frac{8}{3}\sqrt{2}.$$

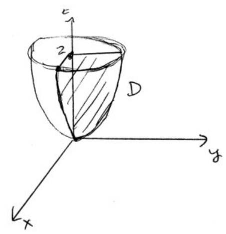
(a.2) Für $z \in \mathbb{R}$ sei

$$C_z := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in C\} = \begin{cases} \emptyset & , z \notin [0,1] \\ \overline{B_{1-z}(0)} & , z \in [0,1] \end{cases},$$

wobei $B_r(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} < r\}$. Bereits nach Vorlesung bekannt: $|B_r(0)| = \pi r^2$. Nach dem Prinzip von Cavalieri folgt

$$|C| = \int_0^1 |C_z| \, dz = \int_0^1 \pi(1-z)^2 \, dz = \pi \int_0^1 z^2 \, dz = \frac{\pi}{3}.$$

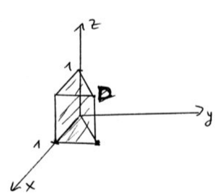
(b.1) Bei Teilaufgabe (b) sind alle Integrationsbereiche messbar. Die Integrationsbereiche sind kompakt und alle Integranden sind stetig auf diesen und somit integrierbar.
D ist ein Viertel eines Rotationsparaboloids mit der Höhe 2.



Mit Satz von Fubini:

$$\int_D x \, d(x,y,z) = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{z}} \int_0^{\sqrt{z-y^2}} x \, dx\,dy\,dz$$
$$= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{z}} \frac{1}{2}(z-y^2)\, dy\,dz = \int_0^2 \left[\frac{1}{2}\left(zy - \frac{1}{3}y^3\right) \right]_0^{\sqrt{z}} dz$$
$$= \int_0^2 \frac{1}{2}\left(z\sqrt{z} - \frac{1}{3} z\sqrt{z}\right) dz = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \left[z^{5/2} \right]_0^2 = \frac{8}{15}\sqrt{2}$$

(b.2) D ist ein Prisma mit einer dreieckigen Grundfläche und Höhe 1.



Nach Fubinis Satz: $\int_D \frac{\sin x}{x} \, d(x,y,z)$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^x \frac{\sin x}{x} \, dy\,dx\,dz = 1 \cdot \int_0^1 \frac{\sin x}{x} \int_0^x 1 \, dy \, dx$$
$$= \int_0^1 \frac{\sin x}{x} \cdot x \, dx = \int_0^1 \sin x \, dx = -\cos 1 + 1.$$