

## Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik 9. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 21.6.2013, 12.30 Uhr

Themen: Rotationskörper, Substitutionsregel, Polar-, Zylinderkoordinaten

**Aufgabe 25 (K).** Seien  $f, g \in C[a, b]$  mit  $0 \leq f(x) < g(x)$  für alle  $x \in [a, b]$ . Sei

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], f(x) \leq y \leq g(x)\}.$$

Ferner sei der Flächenschwerpunkt  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  von  $B$  definiert durch

$$x_0 := \frac{1}{|B|} \int_B x \, d(x, y), \quad y_0 := \frac{1}{|B|} \int_B y \, d(x, y).$$

Zeigen Sie, dass für das Volumen  $V$  des von  $B$  durch Rotation um die  $x$ -Achse erzeugten Rotationskörpers gilt:

$$V = 2\pi y_0 |B|.$$

**Aufgabe 26 (K).** Berechnen Sie folgende Integrale mittels Zylinder- bzw. Polarkoordinaten:

(a)  $\int_B (x^2 + y^2)^2 e^{2(1-z)^7} \, d(x, y, z), \quad B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0, 1], x^2 + y^2 \leq (1-z)^2\},$

(b)  $\int_C \frac{y}{x} \, d(x, y), \quad C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \sqrt{x^2 + y^2} \in [r, R], |y| \leq x\}, (0 < r < R).$

*Hinweis zu (b):* Aus  $(x, y) \in D$  folgt  $x \geq \frac{r}{\sqrt{2}} > 0$ .

**Aufgabe 27.** Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a, b], y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}$$

für die folgenden Funktionen  $f$  und  $n \in \mathbb{N}$ :

- |                               |                        |
|-------------------------------|------------------------|
| (a) $f(x) = x^n(1-x)$         | $(x \in [0, 1]),$      |
| (b) $f(x) = e^x - 1 - x$      | $(x \in [0, 1]),$      |
| (c) $f(x) =  \sin(nx) $       | $(x \in [-\pi, \pi]),$ |
| (d) $f(x) =  x (1-x^2)^{1/2}$ | $(x \in [0, 1]).$      |

*Hinweis:* Es gilt stets  $f \geq 0$  auf dem jeweiligen Intervall.