Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Dr. Andreas Helfrich-Schkarbanenko

Sommersemester 2013

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik
9. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 21.6.2013, 12.30 Uhr
Themen: Rotationskörper, Substitutionsregel, Polar-, Zylinderkoordinaten

Aufgabe 25 (K). Seien $f, g \in C[a,b]$ mit $0 \le f(x) < g(x)$ für alle $x \in [a,b]$. Sei

$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in [a,b], \; f(x) \le y \le g(x)\}.$$

Ferner sei der Flächenschwerpunkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ von B definiert durch

$$x_0 := \frac{1}{|B|}\int_B x \; d(x,y), \qquad y_0 := \frac{1}{|B|}\int_B y \; d(x,y).$$

Zeigen Sie, dass für das Volumen V des von B durch Rotation um die x-Achse erzeugten Rotationskörpers gilt:

$$V = 2\pi y_0 |B|.$$

Lösung 25

Das Volumen des von B erzeugten Rotationskörpers ist nach dem Prinzip von Cavalieri:

$$V = \pi \int_a^b g(x)^2 - f(x)^2 \, dx.$$

Es gilt:

$$2\pi y_0 = \frac{2\pi}{|B|}\int_B y \, d(x,y) \underset{\text{Fubini}}{=} \frac{2\pi}{|B|}\int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} y \, dy \, dx$$

$$= \frac{2\pi}{|B|}\int_a^b \left[\frac{1}{2}(g(x))^2 - \frac{1}{2}(f(x))^2\right] dx$$

$$= \frac{\pi}{|B|}\int_a^b g(x)^2 - f(x)^2 \, dx = \frac{V}{|B|}$$

$$\Rightarrow 2\pi y_0 |B| = V \Rightarrow \text{Beh.}$$

Aufgabe 26 (K). Berechnen Sie folgende Integrale mittels Zylinder- bzw. Polarkoordinaten:

(a) $\displaystyle\int_B (x^2+y^2)^2 e^{2(1-z)^7} \, d(x,y,z), \quad B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; z \in [0,1], \; x^2+y^2 \le (1-z)^2\},$

(b) $\displaystyle\int_C \frac{y}{x} \, d(x,y), \quad C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \ge 0, \; \sqrt{x^2+y^2} \in [r,R], \; |y| \le x\}, \; (0 < r < R).$

Hinweis zu (b): Aus $(x,y) \in D$ folgt $x \ge \frac{r}{\sqrt{2}} > 0$.

Lösung 26

(a) Nach Fubini gilt

$$\begin{aligned}\int_B (x^2+y^2)^2 e^{2(1-z)^7}\, d(x,y,z) &= \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{2\pi} r^4 e^{2(1-z)^7} \cdot r\, d\varphi\, dr\, dz \\ &= 2\pi \int_0^1 \int_0^{1-z} r^5 e^{2(1-z)^7}\, dr\, dz \\ &= \frac{\pi}{3} \int_0^1 (1-z)^6 e^{2(1-z)^7}\, dz \\ &= \frac{\pi}{3} \int_0^1 y^6 e^{2y^7}\, dy \\ &= \frac{\pi}{3} \Big[\frac{1}{14} e^{2y^7}\Big]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{42}(e^2-1).\end{aligned}$$

(b) Für $\varphi \in [-\pi,\pi]$ gilt

$$|\sin(\varphi)| \le \cos(\varphi) \;\Leftrightarrow\; \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),\; \tan(\varphi) \le 1 \;\Leftrightarrow\; \varphi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}],$$

also

$$C = \big\{(\rho\cos(\varphi), \rho\sin(\varphi)) \in \mathbb{R}^2 : r \le \rho \le R, \varphi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]\big\}$$

sowie

$$\int_C \frac{y}{x}\, d(x,y) = \int_r^R \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\rho\sin(\varphi)}{\rho\cos(\varphi)} \cdot \rho\, d\varphi\, d\rho = \int_r^R \rho \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan(\varphi)\, d\varphi\, d\rho = 0,$$

denn $\tan(-\varphi) = -\tan(\varphi)$ für alle $\varphi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

Aufgabe 27. Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a,b], y^2 + z^2 \le f(x)^2\}$$

für die folgenden Funktionen f und $n \in \mathbb{N}$:

(a) $f(x) = x^n(1-x)$ $\qquad (x \in [0,1])$,
(b) $f(x) = e^x - 1 - x$ $\qquad (x \in [0,1])$,
(c) $f(x) = |\sin(nx)|$ $\qquad (x \in [-\pi,\pi])$,
(d) $f(x) = |x|(1-x^2)^{1/2}$ $\qquad (x \in [0,1])$.

Hinweis: Es gilt stets $f \ge 0$ auf dem jeweiligen Intervall.

Lösung 27 Nach Vorlesung gilt $|B| = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx$. Darum erhalten wir:

a)

$$\begin{aligned}|B| = \pi \int_0^1 x^{2n}(1-x)^2\, dx \;&=\; \pi \int_0^1 (x^{2n} - 2x^{2n+1} + x^{2n+2})\, dx \\ = \pi \cdot \Big(\frac{1}{2n+1} - \frac{2}{2n+2} + \frac{1}{2n+3}\Big) \;&=\; \pi \cdot \frac{1}{(2n+1)(n+1)(2n+3)}.\end{aligned}$$

b)

$$|B| = \pi \int_0^1 (e^x - 1 - x)^2\, dx \;=\; \pi \int_0^1 (e^{2x} - 2e^x(1+x) + (1+x)^2)\, dx \;=\; \pi\Big[\frac{1}{2}e^{2x} - 2xe^x + \frac{1}{3}(1+x)^3\Big]_0^1$$
$$= \pi(\frac{1}{2}(e^2 - 1) - 2e + \frac{7}{3}) \;=\; \frac{\pi}{6}(3e^2 - 12e + 11).$$

c)

$$|B| = \pi \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(nx)|^2\, dx \;=\; 2\pi \int_0^{\pi} \sin^2(nx)\, dx \;=\; \frac{2\pi}{n} \int_0^{n\pi} \sin^2(z)\, dz$$
$$= \frac{2\pi}{n}\Big[\frac{z - \sin(z)\cos(z)}{2}\Big]_0^{n\pi} \;=\; \pi^2.$$

d)

$$|B| = \pi \int_0^1 (|x|(1 - x^2)^{1/2})^2\, dx \;=\; \pi \int_0^1 x^2(1 - x^2)\, dx \;=\; \pi \int_0^1 (x^2 - x^4)\, dx$$
$$= \pi \cdot (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) \;=\; \frac{2\pi}{15}.$$