Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Dr. Andreas Helfrich-Schkarbanenko

Sommersemester 2013

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik
10. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 28.6.2013, 12.30 Uhr
Themen: Kugelkoordinaten, Differentialgleichungen, Trennung der Veränderlichen

Aufgabe 28 (K). Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme auf geeigneten Intervallen:

(a) $y'(x) = -\frac{x^2}{y(x)^3}$, für $y(0) = -1$, bzw. für $y(0) = 1$,

(b) $\log(y') = x - y - e^y$, $y(1) = 0$,

(c) $xy(1 + x^2)y' = 1 + y^2$, $y(1) = 2$.

Lösung 28

(a) Dies ist eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. Mit der Darstellung $y' = dy/dx$ bringen wir sie auf die Form

$$y^3\,dy = -x^2\,dx$$

(Trennung der Veränderlichen) und erhalten die Lösungen dann aus

$$\int y^3\,dy = -\int x^2\,dx + C \qquad (C \in \mathbb{R})\,.$$

Dies führt auf $\frac{1}{4}y^4 = -\frac{1}{3}x^3 + C$, also $y^4 = c - \frac{4}{3}x^3$ (mit $c = 4C$). Formal führt dies auf die Lösungen

$$y(x) = \pm\sqrt[4]{c - \frac{4}{3}x^3}$$

mit maximalem Existenzintervall $(-\infty, \sqrt[3]{\frac{3c}{4}})$.

•Die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ liefert nun $c = y(0)^4 + \frac{4}{3}0^3 = 1$, und wegen $y(0) = 1 > 0$ ergibt sich als Lösung

$$y(x) = \sqrt[4]{1 - \frac{4}{3}x^3}$$

auf dem maximalen Existenzintervall $(-\infty, \sqrt[3]{\frac{3}{4}})$.

•Es ist nun der Anfangswert $y(0) = -1 < 0$ vorgegeben. Dies ergibt als Lösung

$$y(x) = -\sqrt[4]{1 - \frac{4}{3}x^3}$$

auf dem maximalen Existenzintervall $(-\infty, \sqrt[3]{\frac{3}{4}})$.[1]

[1] Oder $(-(\frac{3}{4})^{1/3}, (\frac{3}{4})^{1/3})$?

(b) Wir setzen beide Seiten der Gleichung in die Exponentialfunktion ein:

$$y' = \exp\bigl(x - y - e^y\bigr)\,, \qquad \text{also} \qquad y' = e^x e^{-y} e^{-e^y}\,.$$

Dies ist eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. Mit der Darstellung $y' = dy/dx$ bringen wir sie auf die Form

$$e^y e^{e^y}\,dy = e^x\,dx$$

(Trennung der Veränderlichen) und erhalten die Lösungen dann aus

$$\int e^y e^{e^y}\,dy = \int e^x\,dx + C \qquad (C \in \mathbb{R})\,.$$

Dies führt auf $e^{e^y} = e^x + C$, und $y(1) = 0$ liefert $e^1 = e^1 + C$, also $C = 0$. Folglich ist

$$y(x) = \log\bigl(\log(e^x + 0)\bigr) = \log x$$

die auf $(0, \infty)$ definierte Lösung des gegebenen Anfangswertproblems.

(c) Die Gleichung lässt sich für $x \neq 0$ schreiben in der Form

$$\frac{y}{1+y^2}\,dy = \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx\,.$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen liefert dann

$$\int \frac{y}{1+y^2}\,dy = \int \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx + C \qquad (C \in \mathbb{R})\,.$$

Für den Integranden auf der rechten Seite gilt

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\,,$$

und damit bekommt man nach der unbestimmten Integration die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\log(1+y^2) = \log|x| - \tfrac{1}{2}\log(1+x^2) + C \qquad (C \in \mathbb{R})\,.$$

Multiplikation mit 2 liefert $\log(1+y^2) = \log x^2 - \log(1+x^2) + 2C$; setzen wir beide Seiten dieser Gleichung in die Exponentialfunktion ein, so haben wir (mit $C_1 := e^{2C}$)

$$1 + y^2 = \frac{C_1 x^2}{1+x^2}\,.$$

Die Anfangsbedingung $y(1) = 2$ liefert $5 = \frac{1}{2}C_1$, also $C_1 = 10$. Die Lösung ist somit

$$y(x) = \sqrt{\frac{10x^2}{1+x^2} - 1} = \sqrt{\frac{9x^2-1}{1+x^2}}\,,$$

und zwar für $x > \frac{1}{3}$. (Dabei ergibt sich das Vorzeichen der Wurzel aus $y(1) = 2 > 0$.)

Aufgabe 29 (K). Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme auf geeigneten Intervallen:

(a) $y'(x) = -\frac{x}{(x-1)y(x)} e^{y(x)^2}, \quad y(0) = 1,$

(b) $x(1+x^2)y(x)y'(x) = 1 + y(x)^2, \quad y(1) = 2,$

(c) $y'(x) = x\sin(x)e^{-y(x)}, \quad y(\pi) = 1.$

Lösung 29 Sei im Folgenden stets y eine Lösung des AWPs. Wir lösen die Aufgabe mittels Trennung der Veränderlichen.

(a) Mit $-\frac{t}{t-1} = -\frac{t-1+1}{t-1} = -1 - \frac{1}{t-1} = -1 + \frac{1}{1-t}$ $\quad (*)$ gilt

$$\begin{aligned} -x - \log(1-x) &= \int_0^x -1 + \frac{1}{1-t}\,dt \overset{(*)}{=} \int_0^x -\frac{t}{t-1}\,dt = \int_0^x y'(t)y(t)e^{-y(t)^2}\,dt \\ &= \int_{y(0)}^{y(x)} se^{-s^2} = \big[-\frac{1}{2}e^{-s^2}\big]_1^{y(x)} \\ &= -\frac{1}{2}e^{-y(x)^2} + \frac{1}{2}e^{-1}. \end{aligned}$$

Auflösen nach $y(x)$ liefert

$$y(x) = \big(-\log(2x + 2\log(1-x) + e^{-1})\big)^{1/2}$$

auf $I = (-\delta, \delta)$ für $\delta > 0$ hinreichend klein[2].

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} \log\big(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\big) + \frac{1}{2}\log(2) &= \int_1^x \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}\,dt = \int_1^x \frac{1}{t(1+t^2)}\,dt \\ &= \int_1^x \frac{y'(t)y(t)}{1+y(t)^2}\,dt = \int_{y(1)}^{y(x)} \frac{s}{1+s^2} \\ &= \frac{1}{2}\log(1+y(x)^2) - \frac{1}{2}\log(5), \end{aligned}$$

also

$$\log(1+y(x)^2) = \log(10) + \log\big(\frac{x^2}{1+x^2}\big)$$

Auflösen nach $y(x)$ liefert

$$y(x) = \sqrt{\frac{9x^2-1}{x^2+1}}.$$

für $|x| > 1/3f$.

(c) Es gilt

$$-x\cos(x) + \sin(x) - \pi = \int_\pi^x t\sin(t)\,dt = \int_\pi^x y'(t)e^{y(t)}\,dt = \int_{y(\pi)}^{y(x)} e^s = e^{y(x)} - e$$

Auflösen nach $y(x)$ liefert

$$y(x) = \log\big(e - x\cos(x) + \sin(x) - \pi\big)$$

auf $I = (-\delta, \delta)$ für $\delta > 0$ hinreichend klein[3].

Aufgabe 30.

[2] Das maximale Existenzintervall ist gegeben durch (ξ_1, ξ_2), wobei ξ_1 die eindeutig bestimmte negative Lösung und ξ_2 die in $[0, 1-\varepsilon]$ (für kleines $\varepsilon > 0$) eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung $x + \log(1-x) = -\frac{1}{2e}$ ist. Die Existenz dieser Lösungen folgt aus dem Zwischenwertsatz auf $[-\varepsilon^{-1}, 0]$ bzw. $[0, 1-\varepsilon]$ für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$, die Eindeutigkeit folgt aus der strengen Monotonie der Funktion $x \mapsto x + \log(1-x)$ auf dem jeweiligen Intervall.

[3] Das maximale Existenzintervall ist gegeben durch (ξ_1, ξ_2), wobei ξ_1 die in $[0, \pi]$ und ξ_2 die in $[\pi, 2\pi]$ eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung $-x\cos(x) + \sin(x) = \pi - e$ ist. Die Existenz dieser Lösungen folgt aus dem Zwischenwertsatz auf $[0, \pi]$ bzw. $[\pi, 2\pi]$ klein, die Eindeutigkeit folgt aus der strengen Monotonie der Funktion $x \mapsto -x\cos(x) + \sin(x)$ auf dem jeweiligen Intervall.

(a) Sei $f : [0, R] \to \mathbb{R}$ stetig und $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$. Weisen Sie die Gleichung nach:

$$\int_K f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})\, d(x, y, z) \;=\; 4\pi \int_0^R r^2 f(r)\, dr.$$

(b) Berechnen Sie durch Integration die Masse

$$m \;:=\; \int_B \rho(x, y, z)\, d(x, y, z)$$

einer Kugel B mit dem Radius R und einer Dichte $\rho = \rho(r) = ar$, $a > 0$.

Lösung 30

Lösung: (a) Das Ergebnis folgt mit der Substitutionsformel durch Übergang zu Kugelkoordinaten: $(x, y, z) = g(r, \vartheta, \varphi)$.

Man erhält:

$$\int_K f(r(\vec{x}))\, d(x,y,z) = \int_{g^{-1}(K)} f(r(g(r,\vartheta,\varphi)))\,|\det g'(r,\vartheta,\varphi)|\, d(r,\vartheta,\varphi)$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{R} f(r)\, r^2 \cos\vartheta \, dr\, d\vartheta\, d\varphi =$$

$$= 4\pi \int_{r=0}^{R} r^2 f(r)\, dr.$$

(b) Ansatz: $m = \int \rho(x,y,z)\, d(x,y,z)$.

In Kugelkoordinaten gilt: $|\det g'(r, \varphi, \vartheta)| = r^2 \cos\vartheta$.

Wir wenden Substitutionsregel an.

$$m = a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^R r \cdot r^2 \cos\vartheta \, dr\, d\varphi\, d\vartheta$$

$$= a \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{R^4}{4} \cos\vartheta \, d\varphi\, d\vartheta$$

$$= 2\pi a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^4}{4} \cos\vartheta \, d\vartheta =$$

$$= +2\pi a \frac{R^4}{4} \sin\vartheta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a R^4}{2}(1-(-1)) = \underline{\pi a R^4}.$$