Karlsruher Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2013
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Dr. Andreas Helfrich-Schkarbanenko

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik
11. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 5.7.2013, 12.30 Uhr
Themen: Variation der Konstanten, Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Aufgabe 31 (K)

1. Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme auf geeigneten Intervallen:

$$\text{(a) } y'(x) = -y(x)\tan(x) + \cos(x), \quad y(0) = \pi.$$
$$\text{(b) } y'(x) = -\frac{2x}{1-x^2}y(x) + 1 - x, \quad y(0) = 2.$$

2. Bestimmen Sie jeweils alle Lösungen der Differentialgleichung auf dem angegebenen Intervall:

$$\text{(a) } y'(x) = 3y(x) + e^x\sin(x), \qquad I = \mathbb{R}.$$
$$\text{(b) } x^3y'(x) + (2-3x^2)y(x) = x^3, \qquad I = (0,\infty).$$

Lösung 31 Es handelt sich um lineare inhomogene DGLen erster Ordnung.

1. Zu (a): Die Lösung des homogenen Problems lautet mittels Trennung der Veränderlichen (siehe 10. Übungsblatt) $y_h(x) = c\cos(x)$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Eine spezielle Lösung ist gegeben durch den Ansatz Variation der Konstanten $y_p(x) = c(x)\cos(x)$. Dies eingesetzt in (a) ergibt

$$y_p'(x) = c'(x)\cos(x) - c(x)\sin(x) \stackrel{!}{=} -c(x)\sin(x) + \cos(x) = -y_p(x)\tan(x) + \cos(x),$$

also zum Beispiel $c(x) = x$. Wir erhalten somit $y(x) = y_p(x) + y_h(x) = x\cos(x) + c\cos(x)$ und die Anfangsbedingung liefert $c = \pi$, also

$$y(x) = (x+\pi)\cos(x).$$

Zu (b): Die Lösung des homogenen Problems lautet mittels Trennung der Veränderlichen $y_h(x) = c(1-x^2)$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Eine spezielle Lösung ist gegeben durch den Ansatz Variation der Konstanten $y_p(x) = c(x)(1-x^2)$. Dies eingesetzt in (b) ergibt

$$-2xc(x) + 1 - x = -\frac{2x}{1-x^2}y_p(x) + 1 - x \stackrel{!}{=} y_p'(x) = c'(x)(1-x^2) - 2xc(x),$$

also zum Beispiel $c(x) = \log(1+x)$, mit $x > -1$. Wir erhalten $y(x) = y_p(x) + y_h(x) = \log(1+x)(1-x^2) + c(1-x^2)$ und die Anfangsbedingung liefert $c = 2$, also

$$y(x) = (\log(1+x) + 2)(1-x^2).$$

2. Zu (a): Die Lösung des homogenen Problems lautet mittels Trennung der Veränderlichen $y_h(x) = ce^{3x}$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Eine spezielle Lösung ist gegeben durch $y_p(x) = c(x)e^{3x}$. Dies eingesetzt in (a) ergibt

$$3c(x)e^{3x} + e^x\sin(x) = 3y_p(x) + e^x\sin(x) = y_p'(x) = c'(x)e^{3x} + 3c(x)e^{3x},$$

also zum Beispiel $c(x) = -\frac{1}{5}e^{-2x}\cos(x) - \frac{2}{5}e^{-2x}\sin(x)$. Wir erhalten

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = -\frac{1}{5}e^{x}\cos(x) - \frac{2}{5}e^{x}\sin(x) + ce^{3x} \qquad (c \in \mathbb{R}).$$

Zu (b): Die DGL lautet

$$y'(x) = \frac{3x^2-2}{x^3}y(x) + 1.$$

Die Lösung des homogenen Problems lautet mittels Trennung der Veränderlichen $y_h(x) = cx^3e^{1/x^2}$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Eine spezielle Lösung ist gegeben durch den Ansatz Variation der Konstanten $y_p(x) = c(x)x^3e^{1/x^2}$, wobei

$$1 + c(x)(3x^2-2)e^{1/x^2} = 1 + \frac{3x^2-2}{x^3}y_p(x) = y_p'(x) = c'(x)x^3e^{1/x^2} + c(x)(3x^2-2)e^{1/x^2},$$

also zum Beispiel $c(x) = \frac{1}{2}e^{-1/x^2}$. Wir erhalten

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = \frac{1}{2}x^3 + cx^3e^{1/x^2} \qquad (c \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 32 (K) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) \;=\; Ay(x) + b(x), \qquad y(0) = y_0$$

für die folgenden Fälle:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, $b(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ 0 \end{pmatrix}$, $y_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b(x) = \begin{pmatrix} e^{2x}(2+\sin(x)) \\ -1 \\ e^{2x}(-2+\sin(x)) \end{pmatrix}$, $y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Lösung 32

a) Das charakteristische Polynom lautet $p(\lambda) = det(A - \lambda I) = (\lambda+1)^2$. Ferner ist

$$Kern(A+I) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle, \qquad Kern((A+I)^2) = \mathbb{R}^2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Wir erhalten die allgemeine Lösung des homogenen Problems $y_h(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ für

$$y_1(x) = e^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad y_2(x) = e^{-x}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x(A+I)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = e^{-x}\begin{pmatrix} 1+2x \\ 4x \end{pmatrix}$$

Eine Lösung des inhomogenen Problems lautet $y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$. Dies eingesetzt in (a) ergibt

$$c_1'(x)e^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2'(x)e^{-x}\begin{pmatrix} 1+2x \\ 4x \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} e^{x} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies liefert $c_1'(x) = -2x, c_2'(x) = 1$, so dass eine Lösung gegeben ist durch

$$y_p(x) = -x^2e^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + xe^{-x}\begin{pmatrix} 1+2x \\ 4x \end{pmatrix} = e^{-x}\begin{pmatrix} x^2+x \\ 2x^2 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung lautet daher

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = y_p(x) + c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = e^{-x}\begin{pmatrix} x^2+x+c_1+c_2+2c_2x \\ 2x^2+2c_1+4c_2x \end{pmatrix}.$$

Aus der Anfangsbedingung erhalten wir $c_1 = c_2 = 2$ und es folgt

$$y(x) = e^{-x}\begin{pmatrix} x^2+5x+4 \\ 2x^2+8x+4 \end{pmatrix}.$$

(b) Das charakteristische Polynom lautet $p(\lambda) = det(A - \lambda I) = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 1)$. Daher besitzt die Matrix die Eigenwerte $0, 1, 2$ und die Eigenpaare lauten

$$(0, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}), \qquad (1, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}), \qquad (2, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

Die allgemeine Lösung des homogenen Problems ist daher gegeben durch

$$y_h(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$$

Der Ansatz Variation der Konstanten

$$y_p(x) = c_1(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2(x) e^x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3(x) e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zur Lösung des inhomogenen Problems liefert

$$c_1'(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2'(x) e^x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3'(x) e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x}(2 + \sin(x)) \\ -1 \\ e^{2x}(-2 + \sin(x)) \end{pmatrix}$$

Auflösen dieses linearen Gleichunssystems liefert eine Lösung

$$c_1(x) = e^{2x}, \quad c_2(x) = e^{-x}, \quad c_3(x) = -\cos(x).$$

und damit

$$y_p(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \cos(x) e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - \cos(x))e^{2x} \\ 1 \\ (-1 - \cos(x))e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = \begin{pmatrix} (1 - \cos(x))e^{2x} + c_1 + c_3 e^{2x} \\ 1 + c_2 e^x \\ (-1 - \cos(x))e^{2x} - c_1 + c_3 e^{2x} \end{pmatrix} \qquad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$$

und aus der Anfangsbedingung erhalten wir $c_1 = -\frac{1}{2}, c_2 = 0, c_3 = \frac{1}{2}$, so dass folgt

$$y(x) = \begin{pmatrix} (\frac{3}{2} - \cos(x))e^{2x} - \frac{1}{2} \\ 1 \\ -(\frac{1}{2} + \cos(x))e^{2x} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 33 Finden Sie Lösungen der jeweiligen Differentialgleichung mittels der angegebenen Substitution:

(a) $xy'(x) = x^2 + y(x) + y(x)^2, \qquad z(x) = \dfrac{y(x)}{x}.$

(b) $y'(x) = e^{x+y(x)} - 1, \qquad z(x) = x + y(x).$

(c) $y'(x) = \dfrac{\tan(y(x)^2 + 1)}{y(x)}, \qquad z(x) = y(x)^2 + 1.$

Lösung 33

(a) Sei $z(x) := y(x)/x$. Dann

$$z'(x) = \frac{xy'(x) - y(x)}{x^2} = \frac{x^2 + y(x)^2}{x^2} = 1 + z(x)^2.$$

Mittels Trennung der Veränderlichen ergibt sich

$$\int \frac{1}{1+z^2}\,dz = \int 1\,dx \Rightarrow \arctan(z) = x + c.$$

Also gilt $z(x) = \tan(x + c)$ für ein $c \in \mathbb{R}$ und damit nach Rücksubstitution

$$y(x) = x\tan(x + c).$$

b) Für $z(x) := y(x) + x$ gilt

$$z'(x) = y'(x) + 1 = e^{x+y(x)} = e^{z(x)}.$$

Daher mittels Trennung der Veränderlichen

$$\int \frac{1}{e^z}\,dz = \int 1\,dx \;\Rightarrow\; e^{-z} = -x + c.$$

Alos ist $z(x) = -\log(-x + c)$ für ein $x \in \mathbb{R}$ und es folgt nach Rücksubstitution

$$y(x) = -x - \log(-x + c).$$

(c) Sei $z(x) = y(x)^2 + 1$. Dann

$$z'(x) = 2y(x)y'(x) = 2\tan(y(x)^2 + 1) = 2\tan(z(x))$$

Somit ist mittels Trennung der Veränderlichen und der Substitution $s = z(t)$

$$2x + c = \int^x \frac{z'(t)}{\tan(z(t))}\,dt = \int^{z(x)} \frac{1}{\tan(s)}\,ds = \int^{z(x)} \frac{\cos(s)}{\sin(s)}\,ds = \log(|\sin(z(x))|).$$

Es folgt nach Rücksubstitution

$$y(x) = \pm\sqrt{z(x) - 1} = \pm\sqrt{\arcsin(\pm e^{2x+c}) - 1}$$

für ein $c \in \mathbb{R}$.

Beachte: Die Lösungen aus a)-c) für $c \in \mathbb{R}$ existieren nur auf von c abhängigen Intervallen!