Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Dr. Andreas Helfrich-Schkarbanenko

Sommersemester 2013

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik
12. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 12.7.2013, 12.30 Uhr
Themen: Inhomogene lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten, DGLen höherer Ordnung

Aufgabe 34 (K) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} y(x) + \begin{pmatrix} xe^x \\ 2xe^x \end{pmatrix}, \qquad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung 34 Das charakteristische Polynom der Matrix lautet $p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda + 2) + 4 = \lambda^2$. Die Lösung des homogenen Problems ergibt sich zu

$$y_h(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + xA \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -x \\ 1-2x \end{pmatrix} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

Eine spezielle Lösung

$$y_p(x) = c_1(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2(x) \begin{pmatrix} -x \\ 1-2x \end{pmatrix}$$

erfüllt

$$c_1'(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2'(x) \begin{pmatrix} -x \\ 1-2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xe^x \\ 2xe^x \end{pmatrix},$$

also $c_1'(x) = xe^x, c_2'(x) = 0$. Die Wahl $c_1(x) = (x-1)e^x, c_2(x) = 0$ liefert

$$y(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -x \\ 1-2x \end{pmatrix} + (x-1)e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aus den Anfangsbedingungen folgt $c_1 = 2, c_2 = 0$ und damit

$$y(x) = \begin{pmatrix} 2 + (x-1)e^x \\ 4 + 2(x-1)e^x \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 35 (K) Bestimmen Sie Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

(a) $y''(x) + y'(x) - 12y(x) = 0$
(b) $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 0$
(c) $y'''(x) + 5y''(x) + 8y'(x) + 4y(x) = 0$
(d) $y'''(x) - 2y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 0$

Lösung 35

a) Das charakteristische Polynom lautet $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 12 = (\lambda - 3)(\lambda + 4)$. Die allgemeine homogene Lösung ist daher gegeben durch $y_h(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-4x}$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Der Ansatz $y_p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ führt auf die spezielle Lösung $y_p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}$. Ingesamt

$$y(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{8} + c_1 e^{3x} + c_2 e^{-4x} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

b) Das charakteristische Polynom lautet $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$. Die allgemeine homogene Lösung ist daher gegeben durch $y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Der Ansatz $y_p(x) = q(x)e^{2x}$ für ein Polynom q führt auf die spezielle Lösung $y_p(x) = (\frac{1}{90}x^{10} + \frac{1}{2}x^3)e^{2x}$. Ingesamt

$$y(x) = \frac{1}{90}x^{10}e^{2x} + \frac{1}{2}x^3 e^{2x} + c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

c) Das charakteristische Polynom lautet $p(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 8\lambda + 4 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)^2$. Die allgemeine homogene Lösung ist daher gegeben durch $y_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + c_3 x e^{-2x}$ für $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Der Ansatz $y_p(x) = q_1(x) + q_2(x)\sin(x) + q_3(x)\cos(x)$ für Polynome q_1, q_2, q_3 führt auf die spezielle Lösung $y_p(x) = 1 + 2\cos(x) + \sin(x)$. Ingesamt

$$y(x) = 1 + 2\cos(x) + \sin(x) + c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + c_3 x e^{-2x} \qquad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$$

d) Das charakteristische Polynom lautet $p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 1)$. Die allgemeine homogene Lösung ist daher gegeben durch $y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 \sin(x) + c_3 \cos(x)$ für $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Der Ansatz $y_p(x) = q_1(x)\sin(x) + q_2(x)\cos(x)$ für Polynome q_1, q_2 führt auf die spezielle Lösung $y_p(x) = x\sin(x)$. Ingesamt

$$y(x) = x\sin(x) + c_1 e^{2x} + c_2 \sin(x) + c_3 \cos(x) \qquad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$$

Aufgabe 36 (T) Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und seien $y^{(1)}, \ldots, y^{(n)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ Lösungen von $y'(x) = Ay(x)$. Sei $W(x) := \det(y^{(1)}(x), \ldots, y^{(n)}(x))$ die sogenannte Wronski-Determinante. Es gilt der folgende Satz:

Satz: $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar und $W'(x) = (\mathrm{spur} A) \cdot W(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei $\mathrm{spur} A = a_{11} + \ldots + a_{nn}$.

(a) Beweisen Sie den Satz im Fall $n = 2$.

(b) Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen für $x_0 \in \mathbb{R}$:

i) $\{y_1(x), ..., y_n(x)\}$ ist linear unabhängige Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

ii) $\{y_1(x_0), ..., y_n(x_0)\}$ ist linear unabhängige Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

iii) $\{y_1, ..., y_n\}$ ist ein Fundamentalsystem von $y'(x) = Ay(x)$.

Lösung 36 Beachte, dass nach Vorlesung der Lösungsraum von $y' = Ay$ n-dimensional ist und die Lösungen auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind.

(a) Siehe Abbildung.

(b) i) $\Rightarrow$ ii) ist trivial. Es gelte ii) und sei $c \in \mathbb{R}^n$ mit $c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n = 0$ in V. Dann $c_1 y_1(x_0) + \ldots + c_n y_n(x_0) = 0$ und aus ii) folgt $c_1 = \ldots = c_n = 0$. Also gilt iii). Es gelte schließlich iii) und sei $x \in \mathbb{R}$. Sei $c \in \mathbb{R}^n$ mit $c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x) = 0$. Für $w(z) := c_1 y_1(z) + \ldots + c_n y_n(z)$ gilt dann

$$w'(z) = c_1 A y_1(z) + \ldots + c_n A y_n(z) = Aw(z), \qquad w(x) = 0.$$

Da die Lösung des Anfangswertproblems eindeutig ist, folgt $w \equiv 0$ und damit $c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n = 0$. Aus iii) erhalten wir $c_1 = \ldots = c_n = 0$, was zu zeigen war.

(a) $y^{(1)} = \begin{pmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \end{pmatrix}$, $y^{(2)} = \begin{pmatrix} y_1^{(2)} \\ y_2^{(2)} \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1^{(1)} & y_1^{(2)} \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} \end{pmatrix}$

$$W = \det Y = y_1^{(1)} y_2^{(2)} - y_2^{(1)} y_1^{(2)}$$

$$W'(x) = y_1^{(1)'}(x)\, y_2^{(2)}(x) + y_1^{(1)}(x)\, y_2^{(2)'}(x) - y_2^{(1)'}(x)\, y_1^{(2)}(x) - y_2^{(1)}(x)\, y_1^{(2)'}(x)$$

$$A y^{(i)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^{(i)} \\ y_2^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} y_1^{(i)} + a_{12} y_2^{(i)} \\ a_{21} y_1^{(i)} + a_{22} y_2^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^{(i)'} \\ y_2^{(i)'} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow W'(x) &= \left(a_{11} y_1^{(1)}(x) + \cancel{a_{12} y_2^{(1)}(x)}\right) y_2^{(2)}(x) \\ &+ \left(\cancel{a_{21} y_1^{(2)}(x)} + a_{22} y_2^{(2)}(x)\right) y_1^{(1)}(x) \\ &- \left(\cancel{a_{21} y_1^{(1)}(x)} + a_{22} y_2^{(1)}(x)\right) y_1^{(2)}(x) \\ &- \left(a_{11} y_1^{(2)}(x) + \cancel{a_{12} y_2^{(2)}(x)}\right) y_2^{(1)}(x) \\ &= a_{11} \left(y_1^{(1)}(x) y_2^{(2)}(x) - y_1^{(2)}(x) y_2^{(1)}(x) \right) \\ &+ a_{22} \left(y_1^{(1)}(x) y_2^{(2)}(x) - y_1^{(2)}(x) y_2^{(1)}(x) \right) \\ &= (a_{11} + a_{22})\, W(x) = \operatorname{spur} A\, W(x). \end{aligned}$$

Figure 1: Aufgabe 36 (a)