Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Dr. Andreas Helfrich-Schkarbanenko

Sommersemester 2013

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik
13. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 19.7.2013, 12.30 Uhr
Themen: Inhomogene DGLen höherer Ordnung, Fouriertransformation

Aufgabe 37 (K) Bestimmen Sie allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)}\;\; y''(x) + y'(x) - 12y(x) \;=\; 4 + 6x^2 - 7x \\
&\text{(b)}\;\; y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) \;=\; (3x + x^8)e^{2x} \\
&\text{(c)}\;\; y'''(x) + 5y''(x) + 8y'(x) + 4y(x) \;=\; 4 + 5\cos(x) - 15\sin(x) \\
&\text{(d)}\;\; y'''(x) - 2y''(x) + y'(x) - 2y(x) \;=\; -4\cos(x) - 2\sin(x)
\end{aligned}
$$

Lösung 37

(a) Das charakteristische Polynom lautet $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 12 = (\lambda - 3)(\lambda + 4)$. Die allgemeine homogene Lösung ist daher gegeben durch $y_h(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-4x}$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Der Ansatz $y_p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ führt auf die spezielle Lösung $y_p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}$. Ingesamt

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{8} + c_1 e^{3x} + c_2 e^{-4x} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

(b) Das charakteristische Polynom lautet $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$. Die allgemeine homogene Lösung ist daher gegeben durch $y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Der Ansatz $y_p(x) = q(x)e^{2x}$ für ein Polynom q führt auf die spezielle Lösung $y_p(x) = (\frac{1}{90}x^{10} + \frac{1}{2}x^3)e^{2x}$. Ingesamt

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = \frac{1}{90}x^{10}e^{2x} + \frac{1}{2}x^3 e^{2x} + c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

(c) Das charakteristische Polynom lautet $p(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 8\lambda + 4 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)^2$. Die allgemeine homogene Lösung ist daher gegeben durch $y_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + c_3 x e^{-2x}$ für $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Der Ansatz $y_p(x) = q_1(x) + q_2(x)\sin(x) + q_3(x)\cos(x)$ für Polynome q_1, q_2, q_3 führt auf die spezielle Lösung $y_p(x) = 1 + 2\cos(x) + \sin(x)$. Ingesamt

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = 1 + 2\cos(x) + \sin(x) + c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + c_3 x e^{-2x} \qquad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$$

(d) Das charakteristische Polynom lautet $p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 1)$. Die allgemeine homogene Lösung ist daher gegeben durch $y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 \sin(x) + c_3 \cos(x)$ für $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Der Ansatz $y_p(x) = q_1(x)\sin(x) + q_2(x)\cos(x)$ für Polynome q_1, q_2 führt auf die spezielle Lösung $y_p(x) = x\sin(x)$. Ingesamt

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = x\sin(x) + c_1 e^{2x} + c_2 \sin(x) + c_3 \cos(x) \qquad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$$

Aufgabe 38 (K) Berechnen Sie die Fouriertransformierten der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$:

(a) $f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & , |x| \leq 1 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} \cos(x) & , |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} e^{ix} & , 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$ (d) $f(x) = xe^{-|x|}$

Lösung 38

(a) Für $s \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} \hat{f}(s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} (1 - |x|)e^{-isx}\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{1} (1 - x)(e^{-isx} + e^{isx})\, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{1} (1 - x) \cos(sx)\, dx \\ &\overset{P.I.}{=} \frac{1}{\pi} \Big[\frac{\sin(sx)}{s} - \frac{x \sin(sx)}{s} - \frac{\cos(sx)}{s^2} \Big]_0^1 \\ &= \frac{1 - \cos(s)}{\pi s^2}. \end{aligned}$$

Es bleibt noch den Fall $s = 0$ zu untersuchen. Aus der Vorlesung bekannt, dass für stückweise stetige und absolut integrierbare Funktionen ihre Fouriertransformierte stetig ist. Daher lässt sich $\hat{f}(0)$ durch Limes-Betrachtung ermitteln. Alternativ kann man $\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} (1-|x|)e^{-is0}\, dx = \frac{1}{2\pi}$ ausrechnen. Daher gilt:

$$\hat{f}(s) = \begin{cases} \frac{1-\cos(s)}{\pi s^2}, & , s \neq 0 \\ \frac{1}{2\pi} & , s = 0 \end{cases}.$$

(b)

$$\begin{aligned} \hat{f}(s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)e^{-isx}\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi/2} \cos(x)(e^{-isx} + e^{isx})\, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi/2} \cos(x) \cos(sx)\, dx \end{aligned}$$

Mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos(x) \cos(sx)\, dx &= \big[\sin(x) \cos(sx) \big]_0^{\pi/2} + s \int_0^{\pi/2} \sin(x) \sin(sx)\, dx \\ &= \cos(\frac{\pi}{2}s) + s\big[- \cos(x) \sin(sx)\, dx \big]_0^{\pi/2} + s^2 \int_0^{\pi/2} \cos(x) \cos(sx)\, dx \\ &= \cos(\frac{\pi}{2}s) + s^2 \int_0^{\pi/2} \cos(x) \cos(sx)\, dx \end{aligned}$$

Mit der Bemerkung aus der Teilaufgabe (a) bzgl. der Stetigkiet der Fouriertransformierten erhält man:

$$\hat{f}(s) = \begin{cases} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}s)}{\pi(1-s^2)} & , |s| \neq 1 \\ \frac{1}{4} & , |s| = 1 \end{cases}.$$

(c) Für $s \neq 1$ gilt

$$\begin{aligned}
\hat{f}(s) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^1 e^{ix}e^{-isx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^1 e^{i(1-s)x}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big[\frac{1}{i(1-s)}e^{i(1-s)x}\Big]_0^1 \\
&= \frac{e^{i(1-s)}-1}{2\pi i(1-s)}
\end{aligned}$$

Mit der Bemerkung aus der Teilaufgabe (a) bzgl. der Stetigkiet der Fouriertransformierten erhält man:

$$\hat{f}(s) = \begin{cases} \frac{e^{i(1-s)}-1}{2\pi i(1-s)} & , s \neq 0 \\ \frac{1}{2\pi} & , s = 0 \end{cases}.$$

(d) Für $s \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(s) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-|x|}e^{-isx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} xe^{-x}(e^{-isx}-e^{isx})\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} xe^{(-1-is)x} - xe^{(-1+is)x}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big[(-\frac{x}{is+1}-\frac{1}{(is+1)^2})e^{(-1-is)x} + (-\frac{x}{is-1}+\frac{1}{(is-1)^2})e^{(is-1)x}\Big]_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{2\pi}(\frac{1}{(is+1)^2}-\frac{1}{(is-1)^2}) \\
&= \frac{-2is}{\pi(s^2+1)^2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 39 Sei $f(x) = \max\{0, x-x^2\}$ für $x \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte $\hat{f}$.

(b) Sei $f_n(x) := nf(nx)$ für $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie $\hat{f}_n(s)$ und $\lim_{n\to\infty}\hat{f}_n(s)$.

Lösung 39

(a) Es gilt für $s \neq 0$

$$\begin{aligned}
\hat{f}(s) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^1 (x-x^2)e^{-isx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big[(\frac{1}{is}x^2+\frac{is-2}{s^2}x+\frac{s+2i}{s^3})e^{-isx}\Big]_0^1 \\
&= \frac{2-is-2e^{-is}-ise^{-is}}{2\pi i s^3}
\end{aligned}$$

und

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 x-x^2\,dx = \frac{1}{12\pi}$$

(b) Mittels einer Substitution erhalten wir:

$$\hat{f}_n(s) = \frac{n}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(nx) e^{-isx}\, dx \overset{y:=nx}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-isy/n}\, dy = \hat{f}(\frac{s}{n}).$$

Somit folgt wegen der Stetigkeit von $\hat{f}$ nach l'Hopital

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \hat{f}_n(s) &= \lim_{n\to\infty} \hat{f}(\frac{s}{n}) \\
&= \lim_{s\to 0} \hat{f}(s) \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{2 - is - 2e^{-is} - ise^{-is}}{2\pi i s^3} \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{-i + ie^{-is} - se^{-is}}{6\pi i s^2} \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{ise^{-is}}{12\pi i s} \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{e^{-is}}{12\pi} \\
&= \frac{1}{12\pi}.
\end{aligned}$$